24.1 הרצאה שבוע 12 (אחת לפני אחרונה)

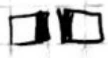
משפט הכרעה: אלג' לבדיקת ספיקות שעוצר אם לא ספיקה ראינו. יש אלג' שתמיד עוצר ועונה את בעיית הספיקות? לא.

מעוניינים לראות שיש בעיה שאינה ניתנת להכרעה (בעיה הכרעה) בעיה שמשתמש בה: בעיית הריצוף

נתון קב' סופית של מרצפות $\{T_1, \dots, T_k\}$ (כל $T$ זה ריבוע מרצפת עם צבעים מסודרים שלבים)

הצבעים של אותם הצבעים

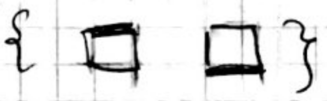
ריצוף חוקי: כל שתי מרצפות סמוכות מסכימות על הצבע בצלע המשותפת

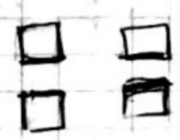


בעיה: בהינתן $\{T_1, \dots, T_k\}$ האם קיים ריצוף חוקי של רבע המישור הימני העליון?

דוגמה:

כן





לא

#לא ניתן לעשות סבוב למה מרצפת או כמו מונחות ב Horiz או כנ"ל ב-vert (ערבוב?)

בעיית הריצוף אינה כריעה.

הבנתי!

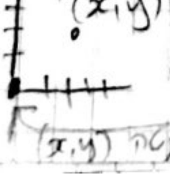
נראה רדוקציה: (אנו יודעים שריצוף לא כריע נוכיח ע"י רדוקציה שאי ספיקות היא לא כריעה)

נניח בשלילה שבעיית הספיקות היא כריעה. יהי A אלג' שמכריע. נבנה אלג' B מתוך A שפותר ריצוף - סתירה.

B: נתון קלט X לבעיית הריצוף. נבנה ממנו נוסחה $\varphi$: $\varphi$ ספיקה $\Leftrightarrow$ ניתן לרצף עם X. (נריץ את האלג' A על $\varphi$, ונחזיר את התשובה שלו.

קלט לריצוף $\{T_1, \dots, T_k\}$ נוסחה $\varphi$ שמתארת את הפונקציה

סוג פונקציה מקומי



ריבוע חוקי:

$$\Sigma = (c, R_1(\cdot,\cdot), \dots, R_k(\cdot,\cdot), Succ(\cdot))$$

מתאר את מי הפונקציה ששמנו מרצפת בקואורדינטה $(x,y)$

**הפריסות:**

① בכל מקום יש מרצפת:

$$\forall x \forall y \bigvee_{i=1}^{k} R_i(x,y)$$

② אין שתי מרצפות באותו מקום:

$$\forall x \forall y \bigwedge_{i \neq j} R_i(x,y) \rightarrow \neg R_j(x,y)$$

③ **הריצוף הוא חוקי:**

$$\forall x \forall y \bigwedge_{i=1}^{k} \Big[ R_i(x,y) \rightarrow \Big( \Big( \bigvee R_j(succ(x),y) \Big) \wedge$$

j: מתאימה לימין

i של המשבצת של j /

ימין של i

$$\Big( \bigvee R_j(x, succ(y)) \Big) \Big) \Big]$$

j: מתאימה מעלה

$$\varphi = ① \wedge ② \wedge ③$$

**טענה:** קיים ריצוף חוקי $\iff$ $\varphi$ ספיקה

[$\Leftarrow$] אם ניתן ריצוף חוקי, אפשר לתרגם

למבנה $M = (\mathbb{N}, +1, 0, R_1^M, \dots R_k^M)$

$$R_i^M = \left\{ (x,y) \;\middle|\; \begin{array}{c}\text{בריצוף הנתון}\\ \text{מרצפת } i \text{ מונחת}\\ \text{ב-}(x,y)\end{array} \right\}$$

ואז $M \models \varphi$

[$\Rightarrow$] אם $\varphi$ ספיקה. אז יש לה מבנה הרברנד

השלמים

$$H = \left( \{ c^H, succ(c)^H, \dots \quad succ^i(c)^H \dots \}, \right.$$

$c$ הפירוש של $c^H$, $succ^H(t^H) = succ(t)^H$, $R_1^H, \dots R_k^H)$

נתייחס את השמות של איברי H כטבעיים ( $0 = c^H$, $1 = succ(c)^H$ )

H מגדיר ריצוף: במקום $(x,y)$ שמים מרצפת i

$\Updownarrow$

$H \models \varphi$ כי ריצוף חוקי

- אילוץ: סימן קבוע

סימן פונקציה חד-מקומי

סימני יחס דו-מקומיים.

איזה פרגמנטים של לוגיקה מסדר ראשון הם כריעים?

(*) למה ייצגו כתנר זוגות של איברים בעצם, במקום עולם של זוגות?

$$\Sigma = ( \underset{\text{ראשית הצירים } (0,0)}{c} ,\ up() ,\ right(),\ R_1(), \dots R_k() )$$

$$\{ c,\ up(c),\ right(c),\ right(up(c)),\ up(right(c))$$

אנו חדים שמהם יפורשו לאותו מקום

אבל הם לא מתקשרים זה לזה.

- לא מתאר את רכב המישור הסלין

<u>פרגמנטים כריעים:</u>

(1) מילון ~~ללא~~ סופי סימני פונקציה, נוסחה מהצורה:

$$\varphi = \exists x_1 \dots \exists x_n \forall y_1 \dots \forall y_m \underbrace{\psi}_{\text{חסרת כמתים}}$$

בעיית הספיקות כאן כריעה.

<u>שלב 1:</u> $\varphi$ ספיקה $\Leftrightarrow$ $\varphi'$ ספיקה,

$$\varphi' = \forall y_1, \dots \forall y_m \psi[{c_1}/{x_1} \dots {c_n}/{x_n}]$$

מילון מורחב $\Sigma'$ (במילון המקורי לא היו סימני פונק' גם ב-$\Sigma'$ אין)

<u>לפי הרברנד:</u>

$\varphi'$ ספיקה $\Leftrightarrow$ יש לה מבנה הרברנד

$$H = ( \{ \underbrace{c_1^H, \_\_\ c_n^H}_{\text{סימני הקבוע שהוספנו}},\ \underbrace{a_1^H, \_\_\ a_k^H}_{\text{סימנים}} \} \_\_\_ )$$

אם היה $\forall$ לפני ה-$\exists$ היה נוסף אבל $f(..)$ כאין נוספים כ"כ קבועים כי הסבר הוא $\exists$ ואז $\forall$

גודל העולם של $H$ = עם סימני הקבוע ב- $\Sigma'$

לא יודעים מה הפירוש של סימני היחס.

עם האופציות לפירוש סימני היחס הוא

סופי (כי העולם סופי)

$R(\ )$ $\quad$ $2^{\ell}$

$\ell$ איברים $\quad$ (כל איבר או מופיע או לא)

<u>סיכום: ספיקות בפרדיגמה זהו:</u> ← [(*) לא חשוב למבחן]

"NP"

<u>פורמולה ②:</u> לוגיקה מונדית (יחידנית) מסדר ראשון.

<u>מילון:</u> סימני יחס חד מקומיים,

סימני קבוע

איסור סימני פונקציה

$$\Sigma = (c_1, \ldots c_n, R_1(), \ldots R_k())$$

<u>טענה:</u> לכל $\varphi$ (סגורה) מעל מילון כנ"ל, אם $\varphi$ ספיקה אז יש לה מבנה בגודל $\leq 2^k$

(*) הוספנו את תנאי $\varphi$ נוסחה סגורה כדי להפעיל את ההוכחה נכון אם $\varphi$ לא סגורה

<u>הוכחה:</u> נניח ש- $\varphi$ ספיקה ו- $M$ מבנה שמספק אותה.

"נאחד" את כל האיברים שנמצאים באותם היחסים

$M' = \{ D^{M'}$ $\quad$ עבור $d \in D^M$:

תת קבוצה של $\{0,1\}^k$ $\quad$ $[d] = x \in \{0,1\}^k$

כאשר $d \in R_i^M \Longleftrightarrow x_i = 1$

$$D^{M'} = \{[d] \mid d \in D^M\}$$

$0\ 1\ 1$

לא ב- $R_1^M$ $\quad$ (נמצא) ב- $R_2^M$ $\quad$ $R_3^M$

הסיבה שלא נקח את כל $\{0,1\}^k$:

$$M = (\{1,2\}, \{1,2\}, \{1\})$$

$R_1 \quad R_2$

לא ב- $R_1$

$M \not\models \forall x R_1(x)$ לכן נבחר את $\sigma$ בעולם, כי הוא לא)

נמצא איבר אחר מ- $D^M$

$$M' = (\{11, 10\}, \_\_\_\_)$$

פירוש סימני קבוע $c^{M'} = [c^M]$

מסתכלים על הפירוש של c ב- M ומציינים באיזה יחסים הוא נמצא ובאיזה לא.

פירוש סימני היחס:

$a \in R_i^{M'} \iff a_i = 1$ הביט ה-i של a.

<u>צ"ל:</u> $M' \models \varphi$ באינדוקציה על מבנה $\alpha$:

$M \models \alpha \iff M' \models \alpha$ (יש גם השמה)

<u>בסיס:</u> $M \models R_i(t) \iff [t]_i = 1$

$M' \models R_i(t)$

(השמה $x$)

---

(*) עבור קבוצה L של נוסחאות, נאמר של- L יש את <u>תכונת המודל הסופי</u> אם לכל $\varphi \in L$, אם $\varphi$ ספיקה, אז יש מבנה סופי שמספק את $\varphi$

(*) אם ל- L יש את תכונת המודל הסופי, אז ספיקות כריעה לנוסחאות ב- L

- נעבור על המבנים הסופיים בסדר הולך ועולה ונחפש אחד שמספק את הנוסחה.

- אם L סגורה תחת $\neg$: (אם $\varphi \in L \Rightarrow \neg\varphi \in L$) ננסה במקביל את $\neg\varphi$.

(*) יש מערכת הוכחה שלמה ונאותה עבור לוגיקה מסדר ראשון.

אם $\varphi$ לא ספיקה אז $\neg\varphi$ טאוטולוגיה $\Leftarrow$ יש לה הוכחה (באורך סופי).

נניח: ניקח מבנה סופי $M$ (מסדרה $A$ של גודל המבנה ואורך הוכחה)

וניקח הוכחה סופית $P$ (נבדוק שאם $M \models \varphi$)

ולכן $P$ הוכחה עבור $\varphi$.

* בלוגיקה מסדר ראשון אין את תכונת המבנה הסופי:

קיימת נוסחה $\varphi$ שהיא ספיקה, אבל לא מסתפקת באף מבנה סופי.

מהי $\varphi$ כזו? $\Sigma = (R(\cdot,\cdot))$

$R$ יחס סדר + $\forall x \exists y R(x,y)$

<u>מערכת ההוכחה HC</u>

Hilbert's calculus

* נגביל ל- $\{\neg, \rightarrow, \forall\}$

[כי $\exists x \varphi \equiv \neg \forall \neg \varphi$]

מספיק רק $\forall$

והרעיון ש- $\leftrightarrow$ · ו מה הקשר שאלה (לבדוק?)

* מבחינתנו, אם תכתוב $\forall x \varphi$ זה שקול לכך שהוכחנו

$\forall y \varphi[y/x]$

$\forall x R(x)$ $\quad$ $\forall y R(y)$

ניקח את אקסיומות $(A1)-(A3)$ מ- HPC,

כשבמקום פסוקים בתחשיב הפסוקים נציב נוסחאות מ- FOL (First Order Logics)

$(A1)$ $\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha)$

$(A2)$ $(\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)) \rightarrow ((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma))$

$(A3)$ $(\neg \beta \rightarrow \neg \alpha) \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta)$

<u>ניקח גם את MP</u>:

$$\frac{\alpha \quad \alpha \rightarrow \beta}{\beta}$$

אם $\varphi$ "טאוטולוגיה פסוקית"

התקבלה מטאוטו' בתחשיב הפסוקים ע"י הצבת (נוסחאות בפסוקים) האטומיים.

– אז $\vdash_{HC} \alpha$

$R(c) \rightarrow R(c)$

$P_c \rightarrow P_0$

מעכשיו כל פעם שנרשום $\vdash$ נתכוון $\vdash_{Hc}$ אלא אם נאמר אחרת

<u>מה חסר לנו?</u>

היינו רוצים: $\forall x R(x) \vdash_{Hc} R(c)$

<u>נוסיף אקסיומה:</u>

$$(A4) \qquad \forall x \varphi \rightarrow \varphi[t/x]$$

כאשר $t$ מותר להצבה ב-$x$ ב-$\varphi$.

<u>לדוג':</u>

| | | |
|---|---|---|
| הנחה | 1. | $\forall x R(x)$ |
| (A4) | 2. | $\forall x R(x) \rightarrow R(c)$ |
| MP | 3. | $R(c)$ |

<u>עוד משהו שחסר:</u>

$$\forall x \left(R(c) \rightarrow R(x)\right) \vdash R(c) \rightarrow \forall x R(x)$$

<u>נוסיף אקסיומה:</u>

$$(A5) \qquad \forall x(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \forall x \psi)$$

אם $x$ אינו חופשי ב-$\varphi$

<u>דבר אחרון שחסר:</u> $R(c) \vdash \forall x R(c)$

<u>נוסיף כלל היסק GEN:</u>

$$\frac{\alpha}{\forall x \alpha}$$

אפשר להפעיל: $x$ לא חופשי בהנחות. - לא נעשה צרה

בהינתן זה נדאג לכך שיתקיים $R(x) \vdash \forall x R(x)$ $[R(x) \not\models^{v} \forall x R(x)]$

$R(x) \not\models^{t} \forall x R(x)$

"נאותות" - אם $\Gamma \vdash \varphi$ אז $\Gamma \models^{v} \varphi$

"שלמות" - אם $\Gamma \models^{v} \varphi$ אז $\Gamma \vdash \varphi$

זה היינו מוספים את ההנחה הזו היינו מקבלים נאותות רק ל-$t$ אירה.

<u>הוכחה שהמערכת נאותה ושלמה</u>

(*) <u>נאותות</u> נראה באינדוקציה על מבנה ההוכחה שאם $\Gamma \vdash \varphi$

אז $\Gamma \models^{v} \varphi$.

~~בסיס:~~ <u>הנחה:</u> אם $\varphi \in \Gamma$ אז $\Gamma \models^{v} \varphi$

<u>אקסיומה:</u> (A1)-(A3) טאוטולוגיות (ראינו בשבוע 6 ב-HPC)

(A4) ו-(A5) גם טאוטולוגיות

Scanned by CamScanner

**טענה:** MP-נכון ב-HPC

**GEN:** $\frac{\alpha}{\forall x\alpha}$ נניח ש- $\Gamma\models^{v}\alpha$

**צ"ל:** $\Gamma\models^{v}\forall x\alpha$

יהי $M$ מבנה כך ש- $M\models\Gamma$

$\Gamma\models^{v}\alpha \Rightarrow M\models\alpha$, כלומר, לכל השמה $v$ $M,v\models\alpha$

לכל השמה $u$ ואיבר $d\in D^M$

$$M, \underbrace{u[d/x]}_{v}\models\alpha$$

$\Leftarrow$ לכל השמה $u$, $M,u\models\forall x\alpha$

$\Leftarrow$ $M\models\forall x\alpha$.

ב-HPC:

⊛ משפט הדדוקציה:

HPC: $\Gamma\vdash_{HPC}\alpha\to B \iff \Gamma\cup\{\alpha\}\vdash_{HPC}B$

⊛ משפט הניגודים: אם $\Gamma\cup\{\alpha\}\vdash_{HPC}B$

וגם $\Gamma\cup\{\neg\alpha\}\vdash_{HPC}B$

אז $\Gamma\vdash_{HPC}B$

בעיה של דדוקציה ב-HC: (לוקחת כמו שהוא ב-HPC לגמרי..)

$$R(x)\vdash_{HC}\forall x R(x)$$

אכן

$\nvdash_{HC} R(x)\to\forall x R(x)$: כי לא טאוטולוגיה ולכן מנאותות לא יכיחה.

לכן משפט הדדוקציה ב-HC:

⊛ אם $\Gamma\cup\{\alpha\}\vdash B$ בהוכחה שבה GEN לא הופעל על משתנים #

חופשיים ב- $\Gamma\cup\{\alpha\}$ אז $\Gamma\vdash\alpha\to B$

⊛ אם $\Gamma\vdash\alpha\to B$ אז $\Gamma\cup\{\alpha\}\vdash B$ הכיוון השני של דדוקציה

הוכחת הכיוון הראשון של מ. הדדוקציה:

באינדוקציה על ההוכחה: אם $\Gamma\cup\{\alpha\}\vdash B$ עם המגבלה #

אז $\Gamma\vdash\alpha\to B$

בסיס: * הנחה $B \in \Gamma$ או אקסיומה

$$\Gamma \vdash B$$

$$\frac{\Gamma \vdash B \to (\alpha \to B) \quad (A1)}{\Gamma \vdash \alpha \to B \quad MP}$$

* הנחה $\beta = \alpha$ יכיח; $\Gamma \vdash \alpha \to \alpha$ כטאוטולוגיה פסוקית

צעד: * MP: כמו ב- HPC

* GEN:

$$\frac{\Gamma \cup \{\alpha\} \vdash B}{\Gamma \cup \{\alpha\} \vdash \forall x B} GEN$$

x לא חופשי ב-Γ ולא חופשי ב-α.

הנחת האינדוקציה:

$$\Gamma \vdash \alpha \to B$$

צ"ל: $\Gamma \vdash \alpha \to \forall x B$

$$(A4) \quad \Gamma \vdash \forall x(\alpha \to B) \to (\alpha \to \forall x B)$$

$$\frac{GEN \quad \Gamma \vdash \forall x(\alpha \to B)}{\Gamma \vdash \alpha \to \forall x B.} MP$$

מה נשאר: במשפט האחרון (שישי) נראה
ב-9

1. פיכוס ונויה

2. שלמות

3. אי שלמות של גדל.