17.1.17

<u>הרצאה שבוע ח</u>

<u>הגדרות במבנים סופיים</u>

משפט הקומפקטיות

Γ ספיקה ⟺ כל תת קבוצה סופית של Γ ספיקה.

<u>קשירות:</u>

$\Gamma = \psi'$ { אין מסלול באורך 1 בין x ל-y , 2 , ______)

o - - - o . . . o

כל יוצר $\Delta \subseteq \Gamma$ סופית: ספיק.

האם יש נוסחה φ כך שלכל מבנה סופי (M סופי)

$M \models \varphi \iff M$ מייצג גרף קשיר.

בעזרת קומפקטיות - לא נוכל להוכיח שאין, כי קומפקטיות לא מבדילה בין מבנים סופיים ואינסופיים.

~~"משפט קומפקטיות למבנים סופיים"~~

~~ל-Γ יש מודל סופי ⟺ לכל תת קב' סופית של Γ יש מודל סופי~~
(I) (II)

משפט לא נכון!

יש Γ של תבניות שמספקים אותה הם אינסופיים (נכשל ב-I)

אבל לכל תת קבוצה סופית $\Delta \subseteq \Gamma$ יש מבנה <u>סופי</u> שמספק את Δ.

$\alpha_n = \exists x_1 \dots \exists x_n \bigwedge_{i \neq j} \neg(x_i = x_j)$ לפחות n איברים שונים

$\Gamma = \{\alpha_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ (כל מבנה מכיל אינסוף איברים)

[אבל בכל תת ק' סופית יש n מקסימלי ......]

<u>דוג' לשימוש נכון בקומפקטיות</u>

אם המילון $\Sigma = (=)$

התכונה "גודל העולם זוגי" אינה שגדירה במבנים סופיים

$\boxed{\varphi\text{ - נוסחה אחת הינה}}$

אין נוסחה φ כך שלכל M סופי: $M \models \varphi \iff |M|$ זוגי.

<u>בהכרח</u> נניח בשלילה שקיים φ כזו. נסמן $\Gamma = \{\alpha_n \mid n \in \mathbb{N}\}$

נתבונן ב- $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$, $\Gamma \cup \{\varphi\}$

Scanned by CamScanner

עבד אותו!

$\Gamma \cup \{\varphi\}$ ספיקה? כן, לפי קומפקטיות.

מסתפקת רק במבנים אינסופיים ?

תהי $\Delta \subseteq \Gamma \cup \{\varphi\}$ סופית, ויהי n המקסימלי כך ש-

$\alpha_n \in \Delta$ (או 0 אם אין n כזה)

מבנה שמספק את Δ

$$M = (\{1, \dots, 2n\})$$

$\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ ספיקה? כן, באופן דומה

$$\left[M = (\{1, 2, \dots, 2n+1\}) \text{ נקח} \right]$$

(Down) לפי LS, יש מבנים M_φ ו- $M_{\neg\varphi}$ בני מנייה כך ש-

$M_\varphi \models \Gamma \cup \{\varphi\}$ ובפרט $M_\varphi \models \varphi$

$M_{\neg\varphi} \models \Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ ובפרט $M_{\neg\varphi} \models \neg\varphi$

בלי הגבלת הכלליות

$M_\varphi = (\mathbb{N})$ [כי הם איזומורפיים בגלל שיש רק שוויון]

$M_{\neg\varphi} = (\mathbb{N})$

סתירה!.

לא עובד עבור מילונים עם סימנים נוספים למשל $\Sigma = (=, R(\,))$

$$M_\varphi = (\mathbb{N}, R^{M_\varphi})$$

$$M_{\neg\varphi} = (\mathbb{N}, R^{M_{\neg\varphi}})$$

דוגמא: לשימוש לא קל בקומפקטיות: התכונה "גודל העולם זוגי"

נרצה להוכיח שאין φ מעל מילון השוויון, כך שלכל מבנה M סופי,

$M \models \varphi \iff |D^M|$ זוגי.

משחקי Ehrenfeucht - Faisse (EF)

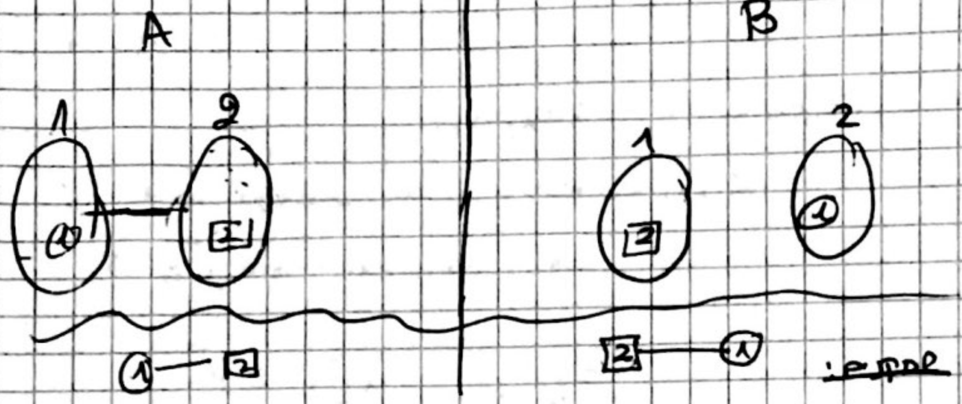
- שני מבנים A, B מעל מילון משותף Σ.

נניח שב- Σ יש רק סימני יחס (הקודם).

$$\Sigma = (E(\,,\,))$$

Scanned by CamScanner

$\exists x \exists y\ E(x,y)$

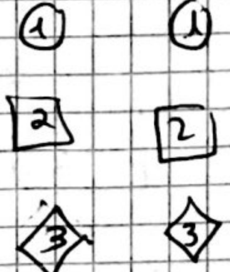


שחקנים:

spoiler | שושן - רוצה להראות שניתן להבחין בין A,B.

duplicator | בובה - רוצה להראות שהמבנים הם אותו דבר.

אבני משחק:



מהלך המשחק: כל סיבוב

- שושן בוחר באחד המבנים ושם את האבן הבאה שלו על איבר במבנה.
- בובה - שמה את האבן הבאה שלה על איבר במבנה השני.

אסטרטגיה עבור שושן

בהינתן ש- $(a_1,b_1)\dots(a_r,b_r)$

אבנים שהונחו עד כה,

$a_1,\dots a_r \in D^A$

$b_1,\dots b_r \in D^B$

ל- (M,x) כאשר $M\in\{A,B\}$

$x\in D^M$

אסטרטגיה עבור בובה:

בהינתן ש- $(a_1,b_1)\dots(a_r,b_r)$

ו- (M,x) (המהלך של שושן בסיבוב הנוכחי)

ל- (M',y) כאשר $M'\neq M$ $y\in D^{M'}$

Scanned by CamScanner

מס' הסיבובים קבוע מראש, k.

מי מנצח?

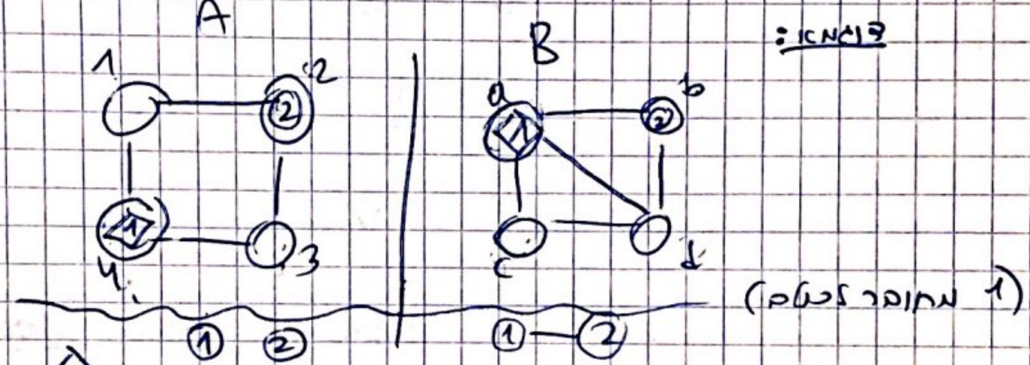
$(a_1,b_1) \ldots (a_k,b_k)$

בווה מנצחת אם איזומורפיזם חלקי:

לכל סימן יחס n-מקומי, ולכל $i_1,\ldots,i_n$

$$(a_{i_1},\ldots,a_{i_n}) \in R^A$$
$$\Updownarrow$$
$$(b_{i_1},\ldots,b_{i_n}) \in R^B$$

דוגמא:



$$B \models \boxed{\exists x}\, \forall y\, [(x=y) \vee E(x,y)]$$

"יש צומת שמחובר לכל האחרים"

(הפוך וקיים)

$$B, V(a/x) \models \neg \exists y\, [x \neq y \wedge \neg E(x,y)]$$

לא צריך לרשום V לפי (*) מספיק לרשום $B,(1/x)$

(*) סימון: לנוסחה φ עם משתנים חופשיים $x_1,\ldots,x_n$ ומבנה M נסמן:

$$M, (d_1/x_1,\ldots,d_n/x_n) \models \varphi$$

את העובדה ש- M והשמה שנותנת $d_1,\ldots,d_n$ ל- $x_1,\ldots,x_n$ מספקת את φ (לפי הגדרות סמנטיות מוגדר היטב)

$$A, (4/x) \not\models \neg \exists y\, [\quad]$$
$$\Updownarrow$$

(not כי)

$$B(a,x) \not\models \exists y\, [x \neq y \wedge \neg E(x,y)]$$

(קיים $y \neq y$ ואין לו שכן y) $\rightsquigarrow A(4/x) \models \exists y\, [x \neq y \wedge \neg E(x,y)]$

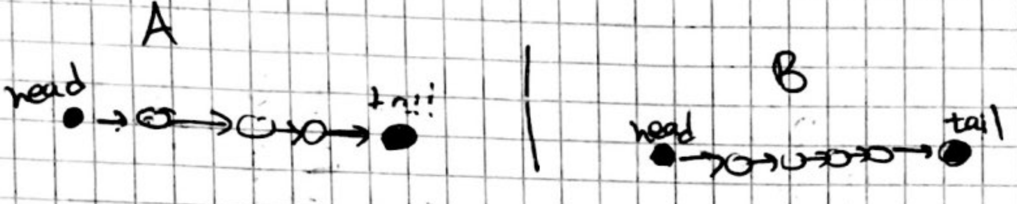
Scanned by CamScanner

מה קורה כשיש סימני קבוע במילון?

אנחנו לפני שהמשחק מתחיל צובעים תואמים את הסימנים של סימן קבוע.

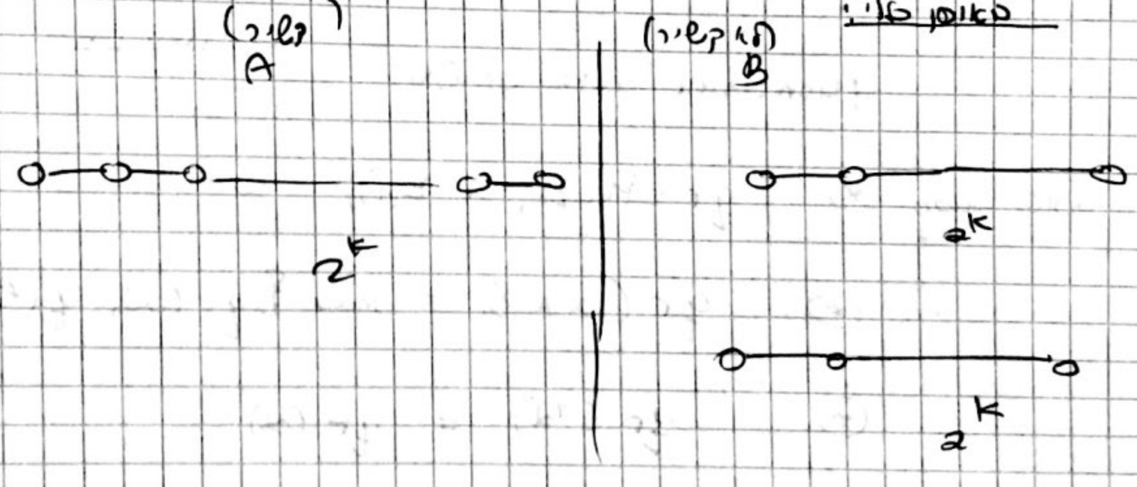
דוגמה:

$$\Sigma = (\underbrace{head, tail}_{\text{סימני קבוע}}, \underbrace{next}_{\text{סימן יחס דו-מקומי}})$$



(בזום מסך)
[lecture 12 game]

באופן כללי:

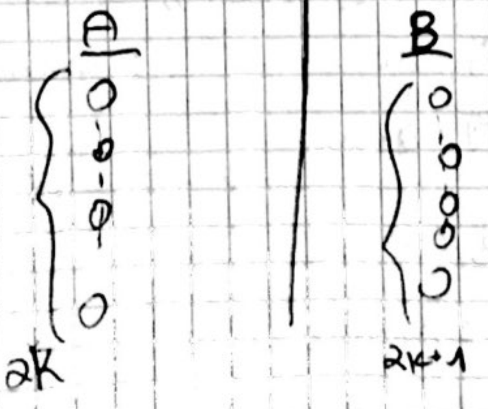


ב- (k-1) סיבובים יש לשחקן אסטרטגיה מנצחת.

פוג: עכשיו לא איזומורפיים, אבל כן יש אסטרטגיה מנצחת 2

ב- k סיבובים (איזומורפיזם חלקי)

$\Sigma_1 = (=)$



Scanned by CamScanner

אסטרטגיה מנצחת עבור דלילה ב-k צעדים:

$(a_1,b_1) \dots\dots (a_r,b_r)$ בסיבוב r

(M,x) המהלך הנוכחי של שמשון

* אם $M=A$ וקיים i כך ש- $x=a_i$ ⇐ (B,b_i)

$M=B$ .....

* אחרת: בה"כ $M=A$, ושמשון מכסה איבר חדש, דלילה בוחרת גם כן איבר חדש לכסות (יודעת שיש כזה כי יש 2^k איברים וגם $r \le k$)
מס סיבובים.

משפט: לשמשון יש אסטרטגיה מנצחת ב-k סיבובים על A,B ⟺ יש נוסחה עם עומק כימון של כמתים k שמפרידה בין A,B: $A \models \varphi$ ו- $B \not\models \varphi$ או להפך

עומק כימון:

quantifierRank $qr(\varphi)$

* $qr(R(t_1,\dots t_n)) = 0$ נוסחה אטומית
* $qr(\alpha \wedge \beta) = \max\{qr(\alpha), qr(\beta)\}$
* $qr(\neg\alpha) = qr(\alpha)$
* $qr(\exists x\alpha) = qr(\forall x\alpha) = qr(\alpha)+1$

מסקנה: לא קיימת נוסחה φ מעל $\Sigma=(=)$ כך שלכל מבנה סופי M, $M \models \varphi \iff |D^M|$ זוגי.

הוכחה: נניח בשלילה שקיימת φ כנ"ל. יהי $k=qr(\varphi)$, נתבונן ב- B,A שמקיימים:

$|D^A| = 2k$

$|D^B| = 2k+1$ $\quad \left(|D^W|,\ W\in\{A,B\}\right)$

לפי בחירת φ:

$A \models \varphi$ $\quad B \not\models \varphi$ (כי זוגי אי-זוגי)

⇐ לשמשון יש אסטרטגיה מנצחת ב-k סיבובים. אבל הראינו שדלילה מנצחת ב-k סיבובים.

אסטרטגיה להוכיח שתכונה p לא גדירה במבנים סופיים.

① נניח בשלילה שיש φ שמגדירה את p במבנים סופיים, ניקח $k = qr(\varphi)$

② נבחר שני מבנים A,B (תלויים ב-k) כך ש- A מקיים p.
B לא מקיים p.

③ נראה שהדופ' אסטרטגיה מנצחת עבור הגלה ב-k סיבובים על A,B.

סתירה לקיום הנוסחה φ. כי קיומה של φ אומר לספק לספוילר אסטרטגיה מנצחת ב-k סיבובים.

(מנצחת לדופליקטור)
<u>אסטרטגיה:</u> אחרי $r \ge 1$ סיבובים,
k סיבובים

לכל i,j: ⊛ אם $2^{k-r} \ge dist(a_i,a_j)$

אז

$$dist(a_i,a_j) = dist(b_i,b_j)$$

⊛ אם $2^{k-r} < dist(a_i,a_j)$

אז $2^{k-r} < dist(b_i,b_j)$

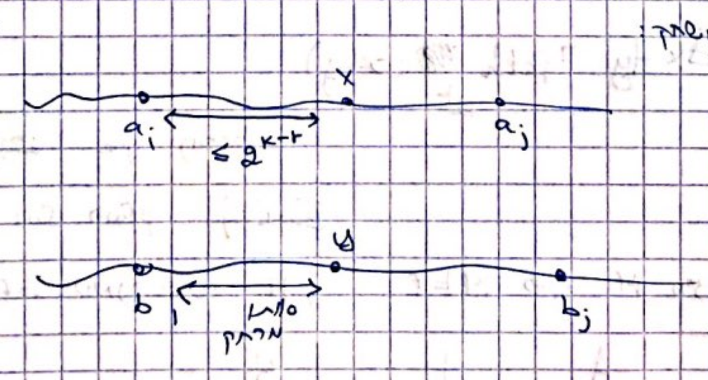
<u>סיבוב ראשון:</u> דופ' פשוט מניח אבן איפשהו

<u>סיבוב שני:</u> אם ספוילר שם אבן "ממש רחוק" $< 2^{k-2}$, אז

גם דופ' עושה זאת, במבנה השני.

אם ספוילר שם אבן במרחק $\le 2^{k-2}$, דופ' שם אבן באותו מרחק מהראשונה במבנה השני.

בה"כ שספוילר משחק:



תמונת מסך
[lecture12pic2]

אחרי k סיבובים:

① אם $dist(a_i,a_j) \le 1$ (k^0), כלומר $(a_i,a_j) \in E^A$, אז $dist(b_i,b_j) = 1$ כלומר $(b_i,b_j) \in E^B$

Scanned by CamScanner

⊕ אם $dist(a_i,a_j)>1$ אז $dist(b_i,b_j)>1$

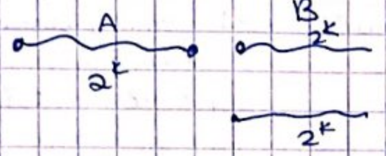
$(a_i,a_j)\notin E^A$ $\quad$ $(b_i,b_j)\notin E^B$

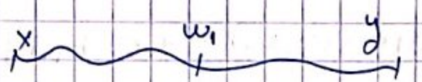
<u>תוצאה:</u> $(a_i,a_j)\in E^A \iff (b_i,b_j)\in E^B$

איזומורפיזם חלקי.

שחקן מנצח ב- $(k+1)$ סיבובים:

נוסחה עם עומק כימות $k+1$ שמפרידה בין שרוך באורך 2^k ושני שרוכים באורך 2^k. יש x,y שאין ביניהם מסלול מאורך 2^k





קיימים x,y

- קיים גם אמצע w_1

[נוסחה ~~...~~ לולאה עצמית] אבל אפשר לחסוך פעמיים 2^{k-1} פעמים

$$Path_{2^k}(x,y) = \exists w_1 \left[\left(Path_{2^{k-1}}(x,w_1)\right) \land Path_{2^{k-1}}(w_1,y)\right]$$

$\forall w_1 =$

$$Path_1(u,v) = E(u,v)$$

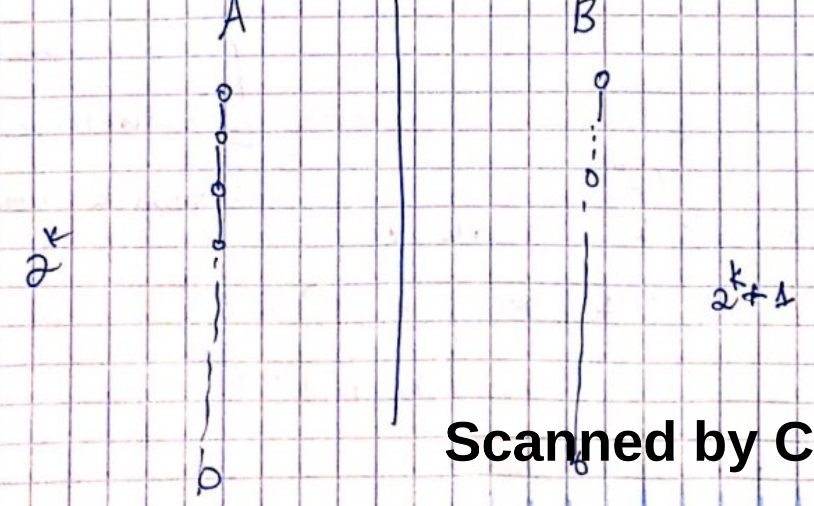
$$B \models \exists x \exists y \neg Path_{2^k}(x,y)$$

$A \not\models$

<u>מסקנה:</u> אין נוסחה

φ מעל המילון $\Sigma=(E)$

כך שלכל מבנה סופי M, $M\models\varphi \iff M$ מייצג גרף קשיר.



זוגיות של הסוגריים $\Sigma=\{(,)\}$:

לא ניתן להכריע במצבים סופיים.