10/1/17

הרצאה שבוע 11

משפט הרברנד: עבור קבוצה Γ של נוסחאות סגורות אוניברסליות.

Γ ספיקה $\Leftrightarrow$ $GrIns(\Gamma)$ ספיקה.

$\Updownarrow$ $\Updownarrow$

ל-Γ יש מבנה הרברנד $\Leftrightarrow$ ל-$GrIns(\Gamma)$ יש מבנה הרברנד

① לכל M: אם $M \models \Gamma$ אז $M \models GrIns(\Gamma)$

② אם M הרברנד: אם $M \models GrIns(\Gamma)$ אז $M \models \Gamma$.

- משפט קומפקטיות לנוסחאות חסרות קשרים ומשתנים
- סקולמיזציה: Γ ספיקה אם"ם $SK(\Gamma)$ ספיקה

משפט הקומפקטיות: לכל קבוצת נוסחאות Γ, Γ ספיקה $\Leftrightarrow$ כל תת קבוצה סופית של Γ ספיקה.

הוכחה: (משפט II) קומפקטיות לקבוצה Γ של נוסחאות סגורות

Γ ספיקה $\overset{\text{סקולם}}{\Longleftrightarrow}$ $SK(\Gamma)$ ספיקה

$\overset{\text{הרברנד}}{\Longleftrightarrow}$ $GrIns(SK(\Gamma))$ ספיקה. $\overset{\text{קומפקטיות בלי כמתים ומשתנים}}{\Longleftrightarrow}$

כל תת קבוצה סופית של $GrIns(SK(\Gamma))$ ספיקה. (*)

$[\Leftarrow]$ Γ ספיקה $\Leftarrow$ כל תת קבוצה של Γ ספיקה ובפרט כל תת קבוצה סופית ספיקה

$[\Rightarrow]$ נניח שכל תת קבוצה סופית של Γ ספיקה, ונראה ש-Γ ספיקה.

נוכיח שכל תת קבוצה סופית של $GrIns(SK(\Gamma))$ ספיקה, ולפי * נקבל ש-Γ ספיקה.

תהי $\Delta' \subseteq GrIn(SK(\Gamma))$ סופית, ונראה ש-Δ' ספיקה

$$\Delta' \subseteq \{GrIns(SK(\gamma_1)) \cup \dots \cup GrIns(SK(\gamma_n)) \mid \gamma_1, \dots, \gamma_n \in \Gamma\}$$

תהי $\Delta = \{\gamma_1, \dots, \gamma_n\} \subseteq \Gamma$

(קבוצת המקורות) Δ היא סופית כי Δ' סופית, ולכן לפי ההנחה ספיקה.

$$\Delta' \subseteq GrIns(SK(\Delta))$$

(*) נשים לב ש-

$$\Delta' \neq GrIns(SK(\Delta))$$

לא בהכרח

יכול להיות אינסופי גם

דוגמה ל- (*)

$$\Gamma = \{\forall x R(x)\}$$

$$sk(\Gamma) = \{\forall x R(x)\}$$

$$GrIns(sk(\Gamma)) = \{R(c), R(f(c)), R(f^2(c)), \ldots\}$$

Δ'

Δ ספיקה $\xRightarrow{\text{סקולים}}$ $sk(\Delta)$ ספיקה $\xRightarrow{\text{הרחבה}}$ $GrIns(sk(\Delta))$ ספיקה

$\Rightarrow$ Δ' ספיקה כי $\Delta \subseteq GrIns(sk(\Delta))$.

$\boxed{\text{שלב II}}$ - תהי Γ קבוצת נוסחאות ויהיו $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots$ המשתנים שחופשיים ב- Γ

נבנה קבוצה Γ' קבוצה של נוסחאות סגורות

"תרגום מטלות משתנים חופשיים"

נחליף כל משתנה חופשי x_{ij} בסימן קבוע חדש c_{ij} $\quad \varphi \to \bar{\varphi}$ $\quad \left[\begin{matrix}\text{דוג'} \\ R(x) \\ \downarrow \\ R(c)\end{matrix}\right]$

טענה: אם קיימים מבנה M והשמה v רק ש- $M, v \models \varphi$ אזי

קיים מבנה $\bar{M}$ רק ש- $\bar{M} \models \bar{\varphi}$ (לא צריך את v כי כבר אין משתנים חופשיים - אין צורך בהשמה מספיק כי!! שום השמה מספק)

הוכחה: $[\Rightarrow]$ יהיו M, v רק ש- $M, v \models \varphi$

נבנה $\bar{M}$ ע"י:

- הפירושים של הסימנים מהמילון המקורי של M - אותו דבר.
- עבור סימן קבוע חדש c_{ij}:

$$(**) \quad c_{ij}^{\bar{M}} = \underbrace{v(x_{ij})}_{\text{הערך של המשתנה החופשי}}$$

נותר להוכיח שמבנה זה עונה על המ"ש:

$[\Leftarrow]$ נתון $\bar{M}$ רק ש- $\bar{M} \models \bar{\varphi}$ נבנה M: (צמצום של $\bar{M}$ לסימנים של המילון המקורי.

$$\Sigma = (\underline{\qquad})$$

$$\bar{\Sigma} = (\underline{\qquad}, c_{i_1}, c_{i_2}, \ldots)$$

(נגדיר השמה v: (לפי השמה החפכי (**)

$$v(x_{ij}) = c_{ij}^{\bar{M}}$$

[ליתר המשתנים (הלא חופשיים) לא משנה איך נגדיר את $\forall$
לפי משפט ההתאמה הסופי]

}

המשך ההוכחה של (שלב II) כמו משלב I בשמות משתנים

בתנאים • במקום GrIns(SK(•)) [כמו ⊛ משלב I]
רק H

<u>משפט קומפקטיות:</u> לכל קבוצת נוסחאות Γ,

Γ ספיקה $\Leftrightarrow$ כל תת קבוצה סופית של Γ ספיקה

משפט <u>Löwenheim-Skolem (LS)</u>: φ - נוסחה סגורה

(downward) φ ספיקה $\Leftarrow$ יש ל-φ מבנה סופי או בן מניה (D^M סופי או בן מניה) (שמספק את φ)

(upward) אם ל-φ יש מבנה אינסופי (D^M אינסופי) אז
(עוצמה א׳ כלשהי)
לכל עוצמה אינסופית λ, יש ל-φ מבנה מעוצמה λ ($|D^M| = \lambda$) (שמספק את φ)

<u>הוכחה:</u>

($\Rightarrow$ down) תהי φ ספיקה

מבנה הרברנד הוא תמיד בן מניה (השפה/המילון בן מניה)

לפי משפט הרברנד, φ ספיקה.

$\Leftarrow$ יש ל-φ מבנה הרברנד והוא בן מניה.

[$\Leftarrow$] ברור.

(upward) רעיון ההוכחה:

נוסיף למילון λ סימני קבוע חדשים

(אם λ לא עוצמה של מניה המילון שהתקבל אינו בן מניה)

- משפט הרברנד תקף גם למילון הזה.

<u>דוגמה:</u> $\lambda = 2^{\aleph_0}$

$\Sigma' = \Sigma \cup \{c_r \mid r \in \mathbb{R}\}$

מאחר ש-φ ספיקה מעל המילון <u>המקורי</u>, φ ספיקה מעל המילון <u>המורחב</u>.

<u>מסקנה:</u> יש ל-φ מבנה הרברנד מעל המילון המורחב. עוצמת העולם של המבנה הוא $\geq \lambda$

האם אפשר לכתוב קבוצת נוסחאות שבדיוק מאפיינת את הטבעיים?

המודל הסטנדרטי של הטבעיים:

$$M_{\mathbb{N}} = (\mathbb{N}, 0, 1, +, *, =, >)$$

$$\Sigma = (\underbrace{c_0, c_1}_{\text{סימני קבוע}}, \underbrace{f_+(\cdot,\cdot), f_*(\cdot,\cdot)}_{\text{פונקציות דו מקומיות}}, \underbrace{R_=(\cdot,\cdot), R_>(\cdot,\cdot)}_{\text{סימני יחס}})$$

(*) האם יש קבוצת נוסחאות Γ כך ש-

$$M \models \Gamma \iff M = M_{\mathbb{N}} \; ?$$

לפי משפט LS, לא:

אילו הייתה Γ כזו, מכיוון ש- $M_{\mathbb{N}} \models \Gamma$, יש לה מבנה אינסופי

$\Rightarrow$ לפי LS (up) יש ל- Γ גם מבנה מעוצמה $2^{\aleph_0}$, שאינו $M_{\mathbb{N}}$.

[משיקולי עוצמות המבנה הזה לא $M_{\mathbb{N}}$ ו- $\Leftarrow$ לא מתקיים]

True Arithmentic $\quad TA = \{\varphi \mid M_{\mathbb{N}} \models \varphi\}$

הראינו של- TA יש מבנה שאינו $M_{\mathbb{N}}$.

האם יש ל- TA מבנה בן מנייה שהוא אינו $M_{\mathbb{N}}$? כן.

נוכיח שקיים M כך ש- $M \models TA$ אבל $M \neq M_{\mathbb{N}}$

ב- M יהיה איבר שגדול מכל הטבעיים.

נתבונן בקבוצת הנוסחאות:

c - סימן קבוע חדש

$$\Gamma = \{\alpha_i \mid i \geq 0\}$$

$$\alpha_i = R_>(c, \underbrace{f_+(f_+(\ldots 0, 1), 1 \ldots 1)}_{\text{"אפס ועוד } i \text{ פעמים" אחד}})$$

נוכיח במשפט הקומפקטיות ש- $\Gamma \cup TA$ ספיקה

(קל) שקיים מבנה M כך ש- $M \models TA$ וגם $M \models \Gamma$

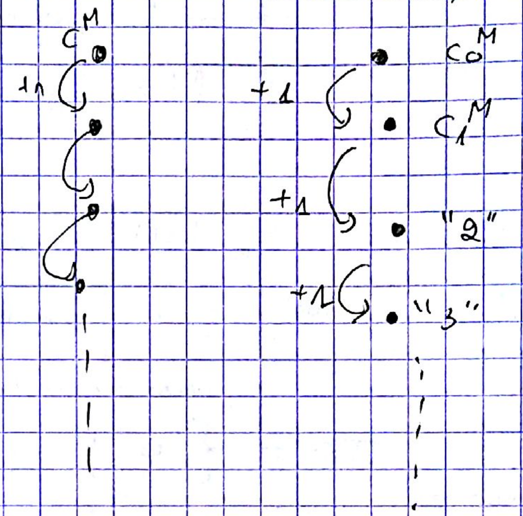
לפי LS (down) יש מבנה בן מנייה כזה, והוא לא יכול להיות $M_{\mathbb{N}}$ (המודל הסטנדרטי), כי אם $M \models \Gamma$ אז "הפירוש" של c ב- M גדול ממש מהפירוש של "אפס ועוד אחד i פעמים" לכל i $\Rightarrow$ לא הטבעיים.

$$M=\left(D^M, C_0^M, C_1^M, \ldots, R^M, \cancel{c^M}\right)$$

אפשר לבטל כי הוא ב- D^M

בסוף מורידים את הפירוש של C^M מהמבנה, (אבל לא את C^M מהעולם)

<u>איך נראית M :</u>



<u>מהלך ההוכחה:</u> (הרחיב את המילון ע"י הוספת סימן קבוע C.

יהי Σ' המילון החדש, נוכיח בעזרת קומפקטיות שקיים מבנה M עבור המילון המורחב Σ' שמספק את $T A \cup M$.

נחזור למילון המקורי ע"י הגדרת מבנה M' שזהה ל- M פרט להורדת הפירוש של c.

$$\Sigma = (c_0, c_1, f_+, f_*, R_<, R_=)$$

$$\Sigma' (\underbrace{\quad '' \quad\quad '' \quad}, c)$$

$$M = (D^M, C_0^M, C_1^M, \_\_\_\_, c^M)$$

$$M' = (D^M, C_0^M, C_1^M, \_\_\_\_)$$

הפירוש של C^M עדיין יהיה ב- $D^{M'}$ כי $D^M = D^{M'}$ ומתקיים

מתוקף ההגדרה.

דוגמה למחיקת שם של קבוע:

$$\Sigma = (a, b, f(), R_>(,))$$

(בלי b) $\Sigma' = (a, f(), R_>(,))$

$M = (\{0,1,2\}, 0, \boxed{1}, +1 \bmod 3, >)$

$(1$ שמו$)$ $\quad M' = (\{0,1,2\}, 0, \quad , +1 \bmod 3, >)$

נוצה
קבוער
סימן
קבוע
אבל $1 \in D^{M}$
כי $1 \in \{0,1,2\}$

$Th(\mathcal{N})$ פסיקה:

תהי $\Delta \subseteq Th(\mathcal{N})$ תת קבוצה סופית, נראה ש- Δ ספיקה.

יהי n האינדקס המקסימלי כך ש- $\alpha_n \in \Delta$ (או 0 אם אין כזה)

נגדיר $\mathcal{M}$ כך ש- $\alpha_i \in \Delta$; $\mathcal{M} \models \alpha_i$.

$$M = (\underbrace{\mathbb{N}, 0, 1, +, *, <, =}_{\text{סטנדרטי}}, n+1)$$

פרשנות "התנהגות"

צ"ל $M \models Th(\mathcal{N})$ כי $M_{\mathbb{N}} \models Th(\mathcal{N})$ ו- M שמצטמצם עם $M_{\mathbb{N}}$

פתוח הסימנים מ- $Th(\mathcal{N})$.

מסקנה: קיים מבנה לא סטנדרטי (לא $M_{\mathbb{N}}$) לטבעיים ($Th(\mathcal{N})$)

משפט אי השלמות של גדל: קיימת נוסחה $\varphi \notin Th(\mathcal{N})$

אבל "לא ניתן להוכיח אותה או את שלילתה".

תחשיב יחסים עם שוויון:

$\Sigma = (R(\ ,\ ))$

נוסף סימן $=$ שמיוחד שחייב להתפרש כ- $=$ המבנה.

דוגמה:

$$\Gamma = \{\exists x_1, \ldots \exists x_n \bigwedge_{i \neq j} \neg(x_i = x_j) \mid n \geq 0\}$$

$\exists x_1 \exists x_2 \ \neg(x_1 \neq x_2)$

$\exists x_1 \exists x_2 \exists x_3 \ (x_1 \neq x_2 \wedge$

$x_1 \neq x_3 \wedge$

$x_2 \neq x_3)$

איזה מבנים מספקים את Γ?

מבנים אינסופיים (D^M אינסופי).

- האם עדיין אפשר לבדוק ספיקות FOL + שוויון?

(FOL = First order logics)
תחשיב היחסים

- האם משפט הרברנד נכון ב- FOL + שוויון?

$$\forall x\forall y\,(R(x,y)\rightarrow x=y)$$

הרברנד

בונים את GrIns ומפעילים קומפקטיות ומקבלים תת-קבוצה סופית שאינה ספיקה.

<u>דוגמא נגדית:</u> למשפט הרברנד φ ספיקה, אבל אין מבנה הרברנד שמספק את φ.

$$\Sigma=(c_1,c_2,=)$$

מבנה עבור φ:

$$M=(\{1\},\overbrace{1,1}^{\text{סימני קבוע}})$$

אבל מבנה הרברנד לא מספק את φ, כי חייבים $c_1^M\neq c_2^M$ (תחום בהרברנד)

<u>נפטר מ = ע"י תרגום ששומר ספיקות</u>

(אח"כ נוכל להשתמש בהרברנד על תוצאות התרגום כדי לבדוק ספיקות)

$$\Sigma'=(\sim\sim,\underbrace{E(\,,\,)}_{\text{סימן יחס דו מקומי}})\qquad \Sigma=(\_\_\_,=)$$

E - חדש (מתנהג כמו כל סימני היחס, לא מיוחד)

<u>ניסיון I - (נאיבי)</u> - לא עובד

נחליף את = ב: E בכל מקום

$$\exists x\exists y\,E(x,y)\ \leftsquigarrow\ \exists x\exists y\,(x=y)$$

$$\neg E(c_0,c_0)\ \leftsquigarrow\ \neg(c_0=c_0)$$

ספיקה   לא ספיקה

(כי הפירוש לא היה רפלקסיבי)
(למשל נפרש $E=\phi$ עובד)

<u>ניסיון II:</u> (נשים לב ששוויון זה יחס שקילות - רפלקסיבי, סימטרי וטרנזיטיבי) → לא מספיק

לכן, נוסיף דרישות ש- E יתפרש כיחס שקילות

$$Ref(E)=\forall x\,E(x,x)$$

$$Sym = \forall x \forall y \,[E(x,y) \to E(y,x)]$$

$$Trans = \forall x \forall y \forall z \,[E(x,y) \wedge E(y,z) \to E(x,z)]$$

__תרגום__

$$\varphi \rightsquigarrow \underline{\varphi'} \wedge Ref(E) \wedge Sym(E) \wedge Trans(E)$$

החלף שווה ב-E

__דוגמה מסיימת__

$$\exists x \exists y \,[x = y \wedge f(x) \neq f(y)]$$ לא ספיקה - התרגום שלה ספיקה

$$M = \Big(\underbrace{\{1,2,3\}}_{D^M},\ \underbrace{\begin{matrix} 1 \to 2 \\ 2 \to 3 \\ 3 \to 1 \end{matrix}}_{f},\ \underbrace{\{(1,1),(1,2),(2,2),(2,1),(3,3)\}}_{R \text{ יחס}} \Big)$$

צורך ← __ניסיון III ואחרון__ בנוסף לדרישות השקילות. לכל סימן פונק' n-מקומי f:

קונגרואנציה

$$\forall x_1,\dots,\forall x_n \forall y_1,\dots,\forall y_n \Big[\Big(\bigwedge_{i=1}^{n} E(x_i,y_i)\Big) \to E\big(f(x_1,\dots,x_n), f(y_1,\dots,y_n)\big)\Big]$$

לכל סימן יחס n-מקומי R

$$\forall x_1,\dots,\forall x_n \forall y_1,\dots,\forall y_n \Big[\Big(\bigwedge_{i=1}^{n} E(x_i,y_i)\Big) \to \big(R(x_1,\dots,x_n) \leftrightarrow R(y_1,\dots,y_n)\big)\Big]$$

__דוגמה:__ f דו מקומית

$$\forall x \forall y \,[E(x,y) \to E(f(x), f(y))]$$

R דו-מקומי:

$$\forall x_1 \forall x_2 \forall y_1 \forall y_2 \,\big(E(x_1,y_1) \wedge E(x_2,y_2) \to R(x_1,x_2) \leftrightarrow R(y_1,y_2)\big)$$

$$\varphi \rightsquigarrow \hat{\varphi} = \left(\varphi' \wedge \text{שקילות}^{E} \wedge \text{קונגרואנציה}^{E}\right)$$

<u>טענה:</u> φ ספיקה במילון המקורי עם $=$

$\Longleftrightarrow$ $\hat{\varphi}$ ספיקה במילון החדש עם E.

<u>הוכחה:</u>

$[\Longleftarrow]$ כי ניתן לפרש את E כשוויון. ✓

$[\Longrightarrow]$ נניח ש- $\hat{M} \models \hat{\varphi}$. צריך לבנות M' שמספק את φ.

יודעים ש- $E^{\hat{M}}$ יחס שקילות וקונגרואנציה

$$M = \left(\underset{\text{של } E^{\hat{M}}}{\text{מחלקות השקילות}} \; D^{\hat{M}} / E^{\hat{M}} \;,\; \_\_\_\_\_\_ \right)$$

$$\hat{M} = \left(\{1,2,3\} \;,\; \underset{\{1,2\},\ \{3\}}{E \ \text{מחלקות השקילות}} \;,\; \_\_\_\_\_\_ \right)$$

$$M = \left(\{ \{1,2\}, \{3\} \} \;, \right.$$

<u>פירוש סימני הקבוע</u>

$$c_i^{M} = [c_i^{\hat{M}}]$$

מחלקת השקילות ב- $\hat{M}$

<u>סימני פונקציה:</u>

$$f^{M}([x_1], \dots [x_n]) = [f^{\hat{M}}(x_1, \dots x_n)]$$

פועל על אוסף של מחלקות שקילות

מוגדר היטב כי $E^{\hat{M}}$ קונגרואנציה.

<u>סימני יחס:</u>

$$([x_1], \dots [x_n]) \in R^{M}$$

$$\Updownarrow$$

$$(x_1, \dots \dots x_n) \in R^{\hat{M}}$$

מוגדר היטב כי $E^{\hat{M}}$ קונג'.

<u>פ"ל:</u> לכל נוסחה α $\quad \hat{M} \models \alpha \Leftrightarrow M \models \alpha'$

"E" מתפרש כ- "$=$"