מבחנים בלוגיקה למדעי המחשב

© ארזים

8 בספטמבר 2023

תוכן עניינים

1 תש"ף סמסטר ב' מועד א' 2
2 תש"ף סמסטר ב' מועד ב' 6
3 תשפ"א סמסטר א' מועד א' 9
4 תשפ"ב סמסטר ב' מועד א' 12
5 תשפ"ב סמסטר ב' מועד ב' 16

מערכת HPC

אקסיומות:

$$
\begin{array}{ll}
\mathrm{Ax}_1 & A \to (B \to A) \\
\mathrm{Ax}_2 & (A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C)) \\
\mathrm{Ax}_3 & (\neg B \to \neg A) \to ((\neg B \to A) \to B)
\end{array}
$$

כללי היסק:

$$
\begin{array}{ll}
\mathrm{MP} & \text{Derive } B \text{ from } A \text{ and } A \to B
\end{array}
$$

מערכת HC

אקסיומות:

$$
\begin{array}{ll}
\mathrm{Ax}_1 & A \to (B \to A) \\
\mathrm{Ax}_2 & (A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C)) \\
\mathrm{Ax}_3 & (\neg B \to \neg A) \to ((\neg B \to A) \to B) \\
\mathrm{Ax}_4 & (\forall x A(x)) \to A\{^t/_x\} \text{ where } t \text{ is a term} \\
\mathrm{Ax}_5 & (\forall x (A \to B)) \to (A \to \forall x B) \text{ when } x \text{ is not free in } A
\end{array}
$$

כללי היסק:

$$
\begin{array}{ll}
\mathrm{MP} & \text{Derive } B \text{ from } A \text{ and } A \to B \\
\mathrm{Gen} & \text{Derive } \forall x A \text{ from } A
\end{array}
$$

1 תש"ף סמסטר ב' מועד א'

שאלה 1

יהיו Σ, Σ' מילונים כך ש־$\Sigma \subset \Sigma'$ ויהי A פסוק אוניברסלי עם סימן קבוע אחד לפחות ולא שיוויון מעל Σ.

א. הוכיחו: אם Σ' הרחבה סופית של Σ ו־A ספיקה, אז A ספיקה במבנה הרברנד ל־Σ'.

ב. הוכיחו/הפריכו: אם Σ' הרחבה אינסופית של Σ ו־A ספיקה, אז A ספיקה במבנה הרברנד ל־Σ'.

הערה: במבחן נאמר ש־A נוסחה אוניברסלית, אך הובהר בהמשך שמדובק בפסוק אוניברסלי.

פתרון

א. תחילה, ב־Σ יש סימן קבוע אחד ואין שיוויון ולכן יש ל־Σ' מבנה הרברנד H. ממשפט הרברנד, A ספיקה ב־Σ' אמ"מ A ספיקה במבנה הרברנד של Σ'. כעת נשים לב שאם A ספיקה ב־Σ אז קיים מבנה M וסביבה ρ שבה $[|A|]_\rho^M = \text{true}$. אם כן, נגדיר מבנה M' מתאים מעל Σ', שכולל פירושים כלשהם לקבועים/פונקציות/יחסים החדשים ונשים לב שגם $[|A|]_{\rho'}^{M'} = \text{true}$.

ב. אותה הוכחה מהסעיף הקודמת נכונה גם כאן. הערה: נאמר פעם ש־"אתם יכולים לישון בשקט בידיעה שלא נעשה לכס משהו כזה במבחן." מומלץ לוודא שזה עדיין נכון.

שאלה 2

יהיו $\Sigma_1 := \left\{f_n^1\right\}_{n=1}^{\infty} \cup \{=\}$ ו־$\Sigma_2 = \left\{F^2, g^1, c, =\right\}$ מילונים כך ש־c קבוע, f_i, g, F סימני פונקציה כאשר F דו מקומית וכל השאר חד מקומיות. הוכיחו שקיים אלגוריתם משמר ספיקות S כך ש־A ספיקה מעל Σ_1 אמ"מ $S(A)$ ספיקה מעל Σ_2.

פתרון

נרצה להגדיר אלגוריתם תרגום S כזה בצורה אינדוקטיבית. בבסיס, נתרגם כל משתנה x_i לעצמו. כעת, לכל ש"ע A נתרגם $f_n(A)$ ל־$F\left(\underbrace{g(g(\ldots g(c)))}_{g^n(c)}, S(A)\right)$. כל היתר: שיוויון, $\exists, \forall, \vee, \wedge, \neg$, מתורגמים לאותו דבר, דהיינו למשל $S(\neg A) = \neg S(A)$.

כעת תהי A ספיקה מעל Σ_1 ונראה ש־$S(A)$ ספיקה מעל Σ_2. יהיו M מבנה ו־ρ סביבה שבהן $[|A|]_\rho^M = \text{true}$. נגדיר מבנה M' מעל Σ_2 באופן הבא: $D^{M'} = D^M \cup \{0, 1, 2, \ldots\}$ כאשר בה"כ המספרים אינם מוכלים ב־D^M (אחרת "נקרא להם בשם אחר"). בנוסף, $c^{M'} = 0$, ו־$g^{M'}(n) = n + 1$, ולבסוף

$$F^{M'}(x, y) = \begin{cases} f_n^M(y) & x = \left(g^{M'}\right)^n(c) \text{ for some n} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

אז נשים לב ש־$[|A|]_\rho^{M'} = \text{true}$ באינדוקציה מבנית על A: עבור משתנים זה ברור, וכן הצעד עבור שיוויון ו־$\exists, \forall, \vee, \wedge, \neg$ ברור. לכן מספיק שנראה שמתקבל אותו ערך בתרגום:

$$[|f_n(A)|]_\rho^{M'} = [|F(g^n(c), A)|]_\rho^M \underbrace{=}_{\text{Def}} [|f_n(A)|]_\rho^M$$

בכיוון ההפוך, תהי A כך ש־$S(A)$ ספיקה מעל Σ_2, ויהי מבנה M' וסביבה ρ בו $[|S(A)|]_\rho^{M'} = \text{true}$. נגדיר M מעל Σ_1 שבו $[|A|]_\rho^M = \text{true}$ (מכיוון של־Σ_1, Σ_2 אותם משתנים, אותה סביבה תעבוד). נגדיר $D^{M'} = D^M$, וכן

$$f_n^M(y) = F^{M'}\left(\left(g^{M'}\right)^n\left(c^{M'}\right), y\right)$$

כעת נראה באינדוקציה מבנית על A שאם $S(A)$ ספיקה מעל Σ_2 אז A ספיקה מעל Σ_1: אם A היא משתנה, זה ברור, וכן הצעד עבור שיוויון ו־$\exists, \forall, \vee, \wedge, \neg$ ברור. כעת, נראה שאם $S(f_n(A))$ ספיקה אז גם $f_n(A)$ ספיקה. זאת משום שמתקיים:

$$[|f_n(A)|]_\rho^M = \left[\left|\underbrace{F^{M'}\left(\left(g^{M'}\right)^n\left(c^{M'}\right), A\right)}_{S(f_n(A))}\right|\right]_\rho^{M'} = \text{true}$$

מכיוון שככה תורגם $f_n\left(A\right)$.

שאלה 3

הגדרה 1: קבוצת מבנים S תיקרא קומפקטית אם לכל קבוצת פסוקים Γ, היא ספיקה ב־S אם כל תת־קבוצה סופית של Γ ספיקה ב־S.
הגדרה 2: קבוצת פסוקים Γ תיקרא סגורה תחת קוניונציה אם לכל $A,B\in\Gamma$ יש $C\in\Gamma$ השקולה ל־$A\wedge B$.
הוכיחו: S קומפקטית אם לכל קבוצה Γ הסגורה תחת קוניונציה: Γ ספיקה ב־S אם כל פסוק ב־Γ ספיק ב־S.
הערה: במבחן עורבב בשאלה בין פסוקים לנוסחאות. לא ברור אם השאלה הייתה נכונה.

פתרון

נניח שלכל קבוצה Γ הסגורה תחת קוניונציה: Γ ספיקה ב־S אם כל נוסחה ב־Γ ספיקה ב־S ונראה ש־S קומפקטית. תהי Γ קבוצת נוסחאות, ונניח שכל תת־קבוצה סופית של Γ ספיקה ב־S. נגדיר ב־$\Gamma^{\wedge}$ את ה־"סגור קוניונציה" של Γ, דהיינו:

$$\Gamma^{\wedge}=\left\{\bigwedge_{i\in I}\Gamma_i:\forall i\in I.\Gamma_i\in\Gamma\right\}$$

ברור ש־$\Gamma\subseteq\Gamma^{\wedge}$ ובנוסף ברור ש־$\Gamma^{\wedge}$ סגורה תחת קוניונציה, מכיוון שאם $A=\wedge_{i\in I}\Gamma_i$ ו־$B=\wedge_{i\in J}\Gamma_i$ אז $A\wedge B\sim\wedge_{i\in I\cup J}$. כעת נשים לב שכל נוסחה ב־$\Gamma^{\wedge}$ ספיקה ב־S, כי $\wedge_{i\in I}\Gamma_i$ מסתפק בסביבה שבה תת־הקבוצה הסופית $\{\Gamma_i:i\in I\}$ מסתפקת – וקיימת כזו מההנחה. על כן, לפי ההנחה בשאלה, $\Gamma^{\wedge}$ ספיקה. מכיוון ש־$\Gamma\subseteq\Gamma^{\wedge}$ גם Γ ספיקה (באותה סביבה).

שאלה 4

יהיו φ,ψ,χ פסוקים בתחשיב הפסוקים כך ש־$\mathrm{Var}\left(\chi\right)\cap\left(\mathrm{Var}\left(\varphi\right)\cup\mathrm{Var}\left(\psi\right)\right)=\varnothing$. כמו כן, נתון ש־$\varphi\left\{\frac{\chi}{p_0}\right\}\equiv\psi\left\{\frac{\chi}{p_0}\right\}$, כאשר $\equiv$ מסמל זהות סינטקטית.

א. הגדירו באינדוקציה מבנית אורך של נוסחה, והוכיחו שאם $p\in\mathrm{Var}\left(A\right)$ אז $|B|\leq\left|A\left\{\frac{B}{p}\right\}\right|$.

ב. הוכיחו ש־$p_0\in\mathrm{Var}\left(\varphi\right)$ אמ"מ $p_0\in\mathrm{Var}\left(\psi\right)$.

ג. הוכיחו שאם קיימים φ_1,φ_2 כך ש־$\varphi\equiv\left(\varphi_1\wedge\varphi_2\right)$, אז קיימים ψ_1,ψ_2 כך ש־$\psi\equiv\left(\psi_1\wedge\psi_2\right)$.

ד. הוכיחו ש־$\varphi\equiv\psi$.

פתרון

א. נספור את מספר התווים בנוסחה. נגדיר $|p_i|=1$ לכל משתנה p_i, ואם φ,ψ נוסחאות, אז $|(\neg\varphi)|=|\varphi|+1$ וכן $|(\varphi\wedge\psi)|=|(\varphi\vee\psi)|=|\varphi|+|\psi|+3$. נשים לב שהאורך הינו מונוטוני. כעת, יהיו A,B ו־$p\in\mathrm{Var}\left(A\right)$. אינטואיציה: ב־$A\left\{\frac{B}{p}\right\}$ מופיעה הנוסחה B ולכן ממונוטוניות האורך $|B|\leq\left|A\left\{\frac{B}{p}\right\}\right|$. נוכיח זאת באינדוקציה מבנית על A.
<u>בסיס:</u> חייב להופיע p ולכן $A\left\{\frac{B}{p}\right\}=B$.
<u>צעד:</u> נוכיח ש־$\left|(A\vee C)\left\{\frac{B}{p}\right\}\right|,\left|(A\wedge C)\left\{\frac{B}{p}\right\}\right|,\left|\neg A\left\{\frac{B}{p}\right\}\right|\geq|B|$. לפי הגדרה, כולם שווים לפחות ל־$\left|A\left\{\frac{B}{p}\right\}\right|$ ולפי ההנחה זה לפחות $|B|$.

ב. נניח בה"כ ש־$p_0\in\mathrm{Var}\left(\varphi\right)$ ונראה ש־$p_0\in\mathrm{Var}\left(\psi\right)$. משיקולי סימטריה נקבל את הדרוש. אכן, אם $p_0\in\mathrm{Var}\left(\varphi\right)$, אז $\mathrm{Var}\left(\chi\right)\subseteq\mathrm{Var}\left(\varphi\left\{\frac{\chi}{p_0}\right\}\right)$ (באינדוקציה מבנית על φ) ולכן מכיוון ש־$\psi\left\{\frac{\chi}{p_0}\right\}\equiv\varphi\left\{\frac{\chi}{p_0}\right\}$ גם $\mathrm{Var}\left(\chi\right)\subseteq\mathrm{Var}\left(\psi\left\{\frac{\chi}{p_0}\right\}\right)$. מכיוון ש־$\chi$ פסוק הוא בהכרח מכיל משתנה כלשהו, נסמנו ב־p. נניח בשלילה ש־$p_0\notin\mathrm{Var}\left(\psi\right)$, אזי $\psi\left\{\frac{\chi}{p_0}\right\}=\psi$ אבל אז $p\in\mathrm{Var}\left(\psi\right)$ בסתירה לכך ש־$\mathrm{Var}\left(\chi\right)\cap\left(\mathrm{Var}\left(\varphi\right)\cup\mathrm{Var}\left(\psi\right)\right)=\varnothing$.

ג. לפי הגדרה, מתקיים $\left(\varphi_1\left\{\frac{\chi}{p_0}\right\}\wedge\varphi_2\left\{\frac{\chi}{p_0}\right\}\right)\equiv\varphi\left\{\frac{\chi}{p_0}\right\}$. לכן מתקיים

$$\psi\left\{\frac{\chi}{p_0}\right\}\equiv\left(\varphi_1\left\{\frac{\chi}{p_0}\right\}\wedge\varphi_2\left\{\frac{\chi}{p_0}\right\}\right)$$

אם ψ הוא משתנה שאינו p_0, אז האורך של צד שמאל לעיל יהיה 1 והאורך של צד ימין יהיה לפחות 2. אם ψ הוא p_0, אורך צד שמאל הוא $|\chi|$. לפי סעיף ב' p_0 גם ב־$\text{Var}(\varphi)$ ולכן הוא לפחות באחד מבין φ_1, φ_2 ושוב נקבל סתירה לשיוויון האורכים שכן אורך צד ימין לפחות $|\chi|+1$. לכן, ממשפט הקריאות היחידה ולפי הגדרת ההצבה, חייבים להיות ψ_1, ψ_2 כך ש־$\psi \equiv (\psi_1 \wedge \psi_2)$ (לא ייתכן ש־$\psi \equiv \neg\psi'$ ולא ייתכן ש־$\psi = (\psi_1 \vee \psi_2)$ כי אז היינו מקבלים סתירה לקריאות היחידה).

ד. נוכיח באינדוקציה מבנית על אורך סדרת הבנייה של φ.
<u>בסיס:</u> אם האורך הוא 1, אז φ משתנה. לפי סעיף ב', ψ חייב להיות אותו משתנה ולכן $\psi \equiv \varphi$.
<u>צעד:</u> נניח שהצעד האחרון הוא $\varphi_1 \wedge \varphi_2$. כלומר, ידוע לנו ש־$\psi_1 \equiv \varphi_1$ ו־$\psi_2 \equiv \varphi_2$ מההנחה מכיוון שאורך סדרות הבנייה שלהם קטן יותר, ועלינו להראות ש־$\psi_1 \wedge \psi_2 \equiv \varphi_1 \wedge \varphi_2$. זה מתקבל מסעיף ג', ובאופן זהה ניתן להוכיח את הצעד עבור $\varphi_1 \vee \varphi_2$, ועבור $\neg\varphi$.

שאלה 5

נתבונן בקבוצת הטענות הבאה:

- קבוצת פסוקים היא עקבית אמ"מ קיימת קבוצת פסוקים שלא נובעת ממנה.
- קיימת קבוצת פסוקים לא עקבית שנובעת מ־Γ.
- אם מקבוצה A נובעת קבוצה C אז לכל קבוצה B, C נובעת גם מאיחוד B עם A.
- אם הקבוצה B נובעת מן הקבוצה A, ומאיחוד A עם B נובעת C, אז C נובעת גם מ־A.
- Γ קבוצת פסוקים לא עקבית.

א. הצרינו את הטענות הללו בלוגיקה מסדר ראשון מעל מילון מתאים. ציינו במפורש מהו כל סימן.

ב. הוכיחו שהטענה האחרונה נובעת מהטענות הקודמות.

ג. הוכיחו שהטענה האחרונה נובעת מהטענות הקודמות בעזרת משפט הרברנד.

פתרון

נגדיר $\Sigma = \left\{R^1_{\text{IsConsistent}}, R^2_{\models}\right\} \cup \left\{f^2_{\cup}\right\} \cup \{\Gamma\}$ כאשר Γ קבוע.

א.

(1)

$$\forall A. \left(R_{\text{IsConsistent}}(A) \iff \exists B. \neg R_{\models}(A, B)\right)$$

(2)

$$\exists A. R_{\models}(\Gamma, A) \wedge \neg R_{\text{IsConsistent}}(A)$$

(3)

$$\forall A \forall C. \left(R_{\models}(A, C) \longrightarrow \forall B. R_{\models}\left(f_{\cup}(B, A), C\right)\right)$$

(4)

$$\forall A \forall B \forall C. \left(R_{\models}(A, B) \wedge R_{\models}\left(f_{\cup}(A, B), C\right) \longrightarrow R_{\models}(A, C)\right)$$

(5)

$$\neg R_{\text{IsConsistent}}(\Gamma)$$

ב. נניח שארבעת הטענות הראשונות מסתפקות ונראה שגם החמישית. ובכן, מכיוון שהטענה השנייה מסתפקת, קיימת קבוצת נוסחאות Ω לא עקבית שנובעת מ־Γ. מכיוון ש־Ω לא עקבית והטענה השלישית מסתפקת, נקבל שכל A נובעת מ־$f_{\cup}(\Omega,\Gamma)$. מכיוון שהטענה הרביעית מסתפקת, נקבל שכל A נובעת מ־Γ. מכיוון שהטענה הראשונה מסתפקת, גם הטענה החמישית מסתפקת.

ג. תחילה נשים לב שטענה 5 נובעת מהקודמות אמ"מ $A' = \{A_1, A_2, A_3, A_4, \neg A_5\}$ אינה ספיקה. כעת, נשים לב ש־Σ מכילה סימן קבוע ולא מכילה את יחס השיוויון, ולכן ממשפט סקולם וממשפט הרברנד A' ספיקה אמ"מ $\mathrm{sk}(A')$ ספיקה (נסתכל על Σ' עם עוד קבוע Ω אחרי שנעשה סקולמיזציה לטענה 2 ועוד פונקציה f אחרי שנעשה סקולמיזציה לטענה 1) אמ"מ $\mathrm{GrIns}(\mathrm{sk}(A))$ ספיקה. נשים לב שטענה 1 אחרי סקולמיזציה היא

$$\forall A \forall B. \left(R_{\text{IsConsistent}}(A) \wedge \neg R_{\models}(A, f(A))\right) \vee \left(\neg R_{\text{IsConsistent}}(A) \wedge R_{\models}(A, B)\right)$$

כלומר, מספיק שנראה ש־$\mathrm{GrIns}(\mathrm{sk}(A))$ אינה ספיקה – לשם כך נמצא תת־קבוצה סופית של $\mathrm{GrIns}(\mathrm{sk}(A))$ שאינה ספיקה: משלילת הטענה החמישית בלי הצבה נקבל $R_{\text{IsConsistent}}(\Gamma)$. מהטענה השנייה בלי הצבה נקבל $R_{\models}(\Gamma,\Omega) \wedge \neg R_{\text{IsConsistent}}(\Omega)$. מהטענה הראשונה אם נציב Γ נקבל מכך ש־$R_{\text{IsConsistent}}(\Gamma)$:

$$\neg R_{\models}(\Gamma, f(\Gamma))$$

ואם נציב Ω ו־$f(\Gamma)$ נקבל מכך ש־$\neg R_{\text{IsConsistent}}(\Omega)$:

$$R_{\models}(\Omega, f(\Gamma))$$

אם נציב בטענה 3 את $A = \Omega, B = \Gamma, C = f(\Gamma)$ נקבל

$$R_{\models}(\Omega, f(\Gamma)) \to R_{\models}(f_{\cup}(\Gamma,\Omega), f(\Gamma))$$

ואם נציב בטענה 4 את $A = \Gamma, B = \Omega, C = f(\Gamma)$ נקבל

$$R_{\models}(\Gamma,\Omega) \wedge R_{\models}(f_{\cup}(\Gamma,\Omega)) \longrightarrow R_{\models}(\Gamma, f(\Gamma))$$

ולכן מצאנו תת־קבוצה של $\mathrm{GrIns}(\mathrm{sk}(A))$ שאינה ספיקה, כי יש לנו כאן סתירה: צריך גם ש־$R_{\models}(\Gamma, f(\Gamma))$ וגם ש־$\neg R_{\models}(\Gamma, f(\Gamma))$.

2 תש"ף סמסטר ב' מועד ב'

שאלה 1

נתון המילון $\Sigma=\left\{f^2,\bar{0},\bar{1},\varepsilon,=,\mathrm{EqLen}^2\right\}$ והמבנה M ל־Σ שאיבריו הן מחרוזות סופיות של $0,1$ (והמחרוזת הריקה). סימן הפונקציה f מפורש כשרשור (למשל $f^M(00,1)=001$). הקבועים $\bar{0},\bar{1},\varepsilon$ מפורשים כתווים $0,1$ והמחרוזת הריקה. הפרדיקט EqLen מפורש כשיוויון של אורך מחרוזות. הצרינו בלוגיקה מסדר ראשון את הטענות הבאות:

א. x הוא ההיפוך של y (למשל 011 הוא ההיפוך של 110)

ב. x הוא פלינדרום (מחרוזת שלא משתנה אם הופכים אותה, לדוגמה 11011).

ג. x מחרוזת שמופיעים בה $0,1$ לסירוגין ומתחילה ב־0.

ד. x באורך 2 מודולו 3.

פתרון

א. הרעיון: נשרשר את xy ונפצל את זה לתתי־מחרוזות $abcde$. אם האורך של b,d הוא 1 ושל a,e שווה, נדרוש ש־$b=d$. זה בדיוק יתאים לבחירה כלשהי של תווים במקומות הפוכים במחרוזות ובדיקה אם היא שווה. הביטוי:

$$\forall a\forall b\forall c\forall d\forall e.\left(f\left(a,f\left(b,f\left(c,f\left(d,e\right)\right)\right)\right)=f\left(x,y\right)\wedge\mathrm{EqLen}\left(b,\bar{1}\right)\wedge\mathrm{EqLen}\left(d,\bar{1}\right)\wedge\mathrm{EqLen}\left(a,e\right)\right)\longrightarrow b=d$$

ב. נשתמש באותו ביטוי מהמחרוזות הנ"ל, רק שנחליף את xy ב־x:

$$\forall a\forall b\forall c\forall d\forall e.\left(f\left(a,f\left(b,f\left(c,f\left(d,e\right)\right)\right)\right)=x\wedge\mathrm{EqLen}\left(b,\bar{1}\right)\wedge\mathrm{EqLen}\left(d,\bar{1}\right)\wedge\mathrm{EqLen}\left(a,e\right)\right)\longrightarrow b=d$$

ג. תחילה נצרין את זה ש־x מתחיל ב־0:

$$\exists y.f\left(\bar{0},y\right)=z$$

כעת נדרוש שאם $x=abcd$, ו־b,c הם באורך 1, אז הם שונים.

$$\forall a\forall b\forall c\forall d.\left(f\left(a,f\left(b,f\left(c,d\right)\right)\right)\wedge\mathrm{EqLen}\left(b,\bar{0}\right)\wedge\mathrm{EqLen}\left(c,\bar{0}\right)\right)\longrightarrow\neg\left(b=c\right)$$

ד. נדרוש שקיימים a,b,c עם אורך שווה, ו־d מאורך 2, כך ש־$x=abcd$:

$$\exists a\exists b\exists c\exists d.\left(f\left(a,f\left(b,f\left(c,d\right)\right)\right)=x\wedge\mathrm{EqLen}\left(a,b\right)\wedge\mathrm{EqLen}\left(b,c\right)\wedge\mathrm{EqLen}\left(d,f\left(\bar{0},\bar{0}\right)\right)\right)$$

שאלה 2

יהיו Γ_1,Γ_2 קבוצות פסוקים מעל Σ. נתון שלכל מבנה M למילון Σ, Γ_1 ספיקה ב־M אמ"מ Γ_2 לא ספיקה ב־M.
הוכיחו: קיימת קבוצת פסוקים סופית $\triangle$ כך שלכל פסוק A, $\triangle\vDash A$ אמ"מ $\Gamma_1\vDash A$.

פתרון

תחילה נבחין ש־$\Gamma_1\cup\Gamma_2$ אינה ספיקה. לכן, ממשפט הקומפקטיות קיימת $\Gamma_1'\cup\Gamma_2'\subseteq\Gamma_1\cup\Gamma_2$ שאינה ספיקה (כאשר $\Gamma_i'\subseteq\Gamma_i$). נגדיר $\triangle=\Gamma_1'$ ונשים לב שאם $\triangle\vDash A$ ברור ש־$\Gamma_1\vDash A$ כי $\triangle\subseteq\Gamma_1$. כדי להוכיח את הכיוון ההפוך, נשים לב ש־Γ_1' ספיקה אמ"מ Γ_2' אינה ספיקה: אם Γ_1' ספיקה, מכיוון שהאיחוד אינו ספיק – Γ_2' אינה יכולה להיות ספיקה – כיוון שמדובר בפסוקים שערכם אינו תלוי בסביבה. בנוסף, אם Γ_2' אינה ספיקה, אז גם Γ_2 אינה ספיקה (כי $\Gamma_2'\subseteq\Gamma_2$) ולכן Γ_1 ספיקה ולכן Γ_1' ספיקה.
כעת, אם $\Gamma_1\vDash A$ נוכיח ש־$\triangle\vDash A$: יהי M מבנה כך ש־$\triangle$ ספיקה בו. מכיוון ש־$\Gamma_1'=\triangle$ ספיקה, Γ_2' אינה ספיקה, כלומר Γ_2 אינה ספיקה ולכן Γ_1 ספיקה בו, ולכן מההנחה גם A ספיקה בו.

שאלה 3

עבור נוסחה A בתחשיב הפסוקים מעל קבוצת הקשרים $\Omega=\{\neg,\wedge,\vee\}$ נגדיר פעולה כך: למשתנה $*p:=(\neg p)$, ולנוסחאות A,B:

$$\begin{aligned}*(\neg A)&:=\neg(*A)\\ *(A\wedge B)&:=(*A\vee *B)\\ *(A\vee B)&:=(*A\wedge *B)\end{aligned}$$

א. הוכיחו: לכל נוסחה A מעל Ω מתקיים $*A\sim(\neg A)$, כאשר $\sim$ מסמן שקילות סמנטית.

ב. נגדיר מערכת הוכחה D מעל Ω: האקסיומה $A\vee *A$ וכלל ההיסק R: $\frac{(A\vee C),(B\vee(\neg C))}{*(*A\wedge *B)}$. הוכיחו: אם $\Gamma\vdash_D A$ אז $\Gamma\vDash A$.

ג. הוכיחו/הפריכו: אם $\Gamma\vDash A$ אז $\Gamma\vdash_D A$.

פתרון

א. נוכיח באינדוקציה מבנית.
<u>בסיס:</u> לכל משתנה p מתקיים $*p=(\neg p)$ ולכן בוודאי $*p\sim(\neg p)$.
<u>צעד:</u> נניח שהנוסחאות φ,φ' מקיימות $*\varphi\sim(\neg\varphi)$ ו־$*\varphi'\sim(\neg\varphi')$, אזי:

$$*(\neg\varphi)\underbrace{=}_{\text{Def}}\neg(*\varphi)\sim\neg(\neg\varphi)$$

$$*(\varphi\vee\varphi')\underbrace{=}_{\text{Def}}(*\varphi\wedge *\varphi')\sim(\neg\varphi\wedge\neg\varphi')\sim\neg(\varphi\vee\varphi')$$

$$*(\varphi\wedge\varphi')\underbrace{=}_{\text{Def}}(*\varphi\vee *\varphi')\sim(\neg\varphi\vee\neg\varphi')\sim\neg(\varphi\wedge\varphi')$$

מומלץ לפרט יותר מדוע השקילויות מתקיימות, לפי ההגדרה של ערך בסביבה.

ב. ברור שהאקסיומה היא טאוטולוגיה. תחילה נראה שכלל ההיסק נאות: כלומר, שמתקיים $\{A\vee C,B\vee\neg C\}\vDash *(*A\wedge *B)$. לשם כך תהי ρ סביבה. נניח ש־$[|A\vee C|]_\rho=\text{true}$ ו־$[|B\vee\neg C|]_\rho=\text{true}$. אם $[|C|]_\rho=\text{true}$ אז בהכרח $[|B|]_\rho=\text{true}$, ואם $[|C|]_\rho=\text{false}$ אז בהכרח $[|A|]_\rho=\text{true}$. לכן תמיד $[|A\vee B|]_\rho=\text{true}$ ולכן מכיוון שמתקיים

$$*(*A\wedge *B)=**A\vee **B\sim A\vee B$$

מהשקילות הסמנטית נקבל $[|*(*A\wedge *B)|]_\rho=\text{true}$. כעת, נוכיח באינדוקציה על אורך ההוכחה של A מ־Γ, שמתקיים $\Gamma\vDash A$.
<u>בסיס:</u> אם אורך ההוכחה הוא 1, אז בהכרח ההוכחה מכילה רק את A, כלומר $A\in\Gamma$ או אקסיומה, ובפרט $\Gamma\vDash A$.
<u>צעד:</u> ידוע שלכל $1\le i<n$ מתקיים $\Gamma\vDash A_i$ ועלינו להראות ש־$\Gamma\vDash A=A_n$. אם A הוא אקסיומה או $A\in\Gamma$ אז ראינו ש־$\Gamma\vDash A$, ואחרת A התקבל ע"י כלל ההיסק, ומכיוון שכלל ההיסק נאות, $\Gamma\vDash A$ כנדרש.

ג. נפריך. נגדיר $\Gamma=\{p_1\}$ ו־$A=(\neg(\neg p_1))$. קל לראות באינדוקציה על אורך ההוכחה שמה שמוכיחים הוא או p_1, או שהוא מכיל $\vee$ ולכן לא יכול להיות A, מכיוון שהאקסיומה וכלל ההיסק מכילים $\vee$ (לאחר פתיחת ה־$*$, מקריאות יחידה).

שאלה 4

א. תהי Γ קבוצת נוסחאות. נסמן ב־$\Gamma^\exists$ את הסגור הישי שלה. הוכיחו/הפריכו: Γ ספיקה אמ"מ $\Gamma^\exists$ ספיקה.

ב. יהי M מבנה. נסמן $R=\left\{A:\forall\rho\left([|A|]_\rho^M=\text{true}\right)\right\}$. הוכיחו ש־$R$ עקבית ב־HC.

ג. נתונות שתי נוסחאות A,B מעל מילון מונאדי. הוכיחו/הפריכו: אם A ו־B שקולות בכל המבנים האינסופיים אז הן שקולות.

ד. נתון:

$$\begin{aligned}\varphi&:=H(x)\to A(x)\\ \chi&:=\forall x\,(\exists y\,(R(x,y)\wedge H(y))\to\exists y\,(R(x,y)\wedge A(y)))\end{aligned}$$

האם $\chi\vDash_t\varphi$?

פתרון

א. נפריך. נגדיר $\Gamma = \{x = 1, x = 2\}$ מעל מבנה המספרים הטבעיים. ברור שהיא לא ספיקה, כי $2 \neq 1$. עם זאת, לפי הגדרה $\Gamma^{\exists} = \{\exists x.x = 1, \exists x.x = 2\}$ וזו בוודאי ספיקה בכל סביבה.

ב. נשים לב ש־R נכונה, מכיוון שלכל ρ מתקיים שלכל $A \in R$, $[|A|]_{\rho}^{M} = \text{true}$ לפי הגדרה. כעת, נניח בשלילה ש־R לא עקבית ב־HC כלומר ניתן להוכיח מ־R כל דבר ובפרט את $p_1 \wedge \neg p_1$. ממשפט השלמות מתקיים $R \vDash p_1 \wedge \neg p_1$, אבל נשים לב שבפרט בסביבה בה כל המשתנים הם true, R ספיקה ועם זאת $p_1 \wedge \neg p_1$ אינה מסתפקת, וזו סתירה.

ג. נוכיח. תחילה המילון מונאדי ולכן נניח שאין בו יחס שיוויון. כעת, יהי M מבנה. נוכיח ש־$B \iff A$ נכון בו ולכן סה"כ נקבל ש־A, B שקולות. אם M אינסופי זה נתון. אחרת, נסמן את האיברים בתחום של המבנה ב־$\{x_1, \ldots, x_n\}$. נגדיר M' כך ש־$D^{M'} = \{x_1, \ldots, x_n\} \cup \{y_k\}_{k=1}^{\infty}$. נפרש את הקבועים באותו אופן, וכל יחס באופן הבא:

$$R(x) = \begin{cases} R(x_i) & x = x_i \\ R(x_1) & x = y_i \end{cases}$$

כעת, $B \iff A$ נכונה במבנה M', ונוכל להראות באינדוקציה מבנית ($[|\varphi|]_{\rho}^{M} = [|\varphi|]_{\rho}^{M'}$) שזה גורר ש־$B \iff A$ נכונה במבנה M.

ד. לא. נגדיר $D^{M} = \{1, 2, 3\}$, $H = \{1, 2\}$, $A = \{1\}$ ו־$R = \{(1, 2)\}$. נתבונן בסביבה כלשהי שבה $x = 1$. נשים לב ש־$[|\varphi|]_{\rho}^{M} = \text{true}$ אך χ שאינה תלויה כלל בסביבה אינה מסתפקת, בפרט בסביבה זו, מכיוון שעבור $x = 1$, התנאי מתקיים עבור $y = 2$: מתקיים $R(1, 2) \wedge H(2)$, ועם זאת, עבור $x = 1$, התוצאה אינה מתקיימת: לא קיים y כך ש־$R(1, y)$ וגם $A(y)$ כי y חייב להיות 2.

שאלה 5

תנו אלגוריתם S שבהנתן נוסחה A מחזיר פסוק ישי $S(A)$ כך שיתקיים: A תקפה אמ"מ $S(A)$ תקף.

פתרון

ראינו שניתן למצוא את $\text{sk}(\neg A)$, שהוא מהצורה $\forall x_1 \forall x_2 \ldots \forall x_n . \varphi$. נגדיר S שמחזיר את $\exists x_1 \exists x_2 \ldots \exists x_n . \neg \varphi$. כעת, נשים לב ש־$A$ תקפה אמ"מ $\neg A$ איננה ספיקה, אמ"מ $\forall x_1 \forall x_2 \ldots \forall x_n . \varphi$ איננה ספיקה (ממשפט סקולם), אמ"מ $\exists x_1 \exists x_2 \ldots \exists x_n . \neg \varphi$ תקפה.

3 תשפ"א סמסטר א' מועד א'

שאלה 1

א. תנו מילון מתאים להרנת הביטויים הבאים (הערה: בכל פעם שנגיד "סיבוב x" נתכוונן ל־"הישר המתקבל מפעולת סיבוב של 90° של x):

(1) ישר כלשהו x מקביל לישר כלשהו y אמ"מ x לא מקביל לסיבוב של y.

(2) סיבוב כלשהו x מקביל לישר כלשהו y אמ"מ x מקביל לסיבוב ישר y.

(3) אם x כלשהו מקביל ל־y כלשהו ו־z כלשהו מקביל ל־y אז z מקביל ל־x.

(4) קיים ישר y שמקביל לישר B והסיבוב של y מקביל לישר A.

(5) A לא מקביל ל־B.

ב. האם טענה 5 נובעת מקודמותיה? אם כן, הוכיחו בעזרת משפט הרברנד.

פתרון

א. נגדיר $\Sigma = \left\{R_{\|}^2, f_{\text{Rotate}}^1, A, B\right\}$ כאשר $R_{\|}$ סימן יחס, f פונקציה, ו־A, B קבועים.

(1)

$$\forall x \forall y. R_{\|}(x,y) \iff \neg R_{\|}(x, f_{\text{Rotate}}(y))$$

(2)

$$\forall x \forall y. R_{\|}(f_{\text{Rotate}}(x), y) \iff R_{\|}(x, f_{\text{Rotate}}(y))$$

(3)

$$\forall x \forall y \forall z. R_{\|}(x,y) \wedge R_{\|}(z,y) \longrightarrow R_{\|}(z,x)$$

(4)

$$\exists y. R_{\|}(y,B) \wedge R_{\|}(f_{\text{Rotate}}(y), A)$$

(5)

$$\neg R_{\|}(A,B)$$

ב. כן (אפשר גם לחשוב על זה אינטואיטיבית לפני שמפרמלים). תחילה, נשים לב שטענה 5 נובעת מקודמותיה אמ"מ הקבוצה $A' = \{A_1, A_2, A_3, A_4, \neg A_5\}$ איננה ספיקה. ממשפט סקולם, זה מתקיים אמ"מ $\text{sk}(A')$ איננו ספיק, וזה מתקיים (לפי משפט הרברנד: אין לנו סימן שיוויון, ויש לנו לפחות סימן קבוע אחד) אמ"מ $\text{GrIns}(\text{sk}(A'))$ אינו ספיק. נמצא תת־קבוצה של $\text{GrIns}(\text{sk}(A'))$ שאיננה ספיקה. תחילה, נוסיף קבוע C עבור הסקולמיזציה של טענה 4, ממנה אנחנו יודעים שמתקיים (לא צריך להציב כלום):

$$R_{\|}(C,B) \wedge R_{\|}(f_{\text{Rotate}}(C), A)$$

מטענה 5 נקבל $R_{\|}(A,B)$. אם נציב בטענה 3 ש־$x = C, y = B, z = A$ נקבל ש:

$$R_{\|}(C,B) \wedge R_{\|}(A,B) \longrightarrow R_{\|}(A,C)$$

ולכן $R_{\|}(A,C)$. אם נציב בטענה 1 ש־$x = A, y = C$ נקבל ש:

$$R_{\|}(A,C) \iff \neg R_{\|}(A, f_{\text{Rotate}}(C))$$

ולכן $\neg R_{\|}(A, f_{\text{rotate}}(C))$, אבל אם נציב בטענה 2 ש־$x = A, y = C$ נקבל ש:

$$R_{\|}(f_{\text{Rotate}}(A), C) \iff R_{\|}(f_{\text{Rotate}}(C), A)$$

וזו סתירה כי אגף שמאל אינו מסתפק בניגוד לאגף ימין שאנחנו יודעים שמסתפק. לכן מצאנו תת־קבוצה סופית של $\text{GrIns}(\text{sk}(A'))$ שאינה ספיקה, ולכן A' אינה ספיקה – כלומר טענה 5 נובעת מקודמותיה, כנדרש.

שאלה 2

נגדיר מערכת היסק לתחשיב הפסוקים H^*:
אקסיומות:

$$A_1 : \neg\neg\left(x \to (y \to x)\right)$$
$$A_2 : \neg\neg\left((x \to y) \to (\neg y \to \neg x)\right)$$
$$A_3 : \neg\neg\left((x \to (y \to z)) \to ((x \to y) \to (y \to z))\right)$$

כלל היסק:

$$\mathrm{MP}^* : \frac{\neg\neg x, \neg\neg\left(x \to y\right)}{\neg\neg y}$$

הוכיחו/הפריכו:

א. אם $\Gamma \vdash_{H^*} A$ אז $\Gamma \vDash A$.

ב. אם $\Gamma \vdash_{\text{HPC}} A$ אז $\{\neg\neg B : B \in \Gamma\} \vdash_{H^*} A$.

ג. אם $\Gamma \vdash_{H^*} A$ אז $\Gamma \vdash_{\text{HPC}} \neg\neg A$.

פתרון

א. נפריך: נתבונן ב־$\Gamma = \varnothing$. נגדיר $A = A_3$, בוודאי ש־$\Gamma \vdash_{H^*} A$ כי היא אקסיומה (כלומר A זה הוכחה ל־A). עם זאת, נשים לב ש־A_3 לא טאוטולוגיה כי עבור $x = \text{false}, y = \text{true}, z = \text{false}$ נקבל ש־A_3 הוא false.

ב. נפריך: נגדיר $\Gamma = \{p_1\}$ ו־$A = p_1$, אז ברור ש־$\Gamma \vdash_{\text{HPC}} p_1$. נוכיח שאם $\{\neg\neg p_1\} \vdash_{H^*} B$ אז בהכרח B מתחיל ב־$\neg\neg$, ולכן נקבל כי $\{\neg\neg p_1\} \nvdash_{H^*} A$. נשים לב שאם $\{\neg\neg p_1\} \vdash_{H^*} B$ אז בהכרח B התקבל מאחד מהבאים: אקסיומה (ואז ברור שהוא מתחיל ב־$\neg\neg$), כלל ההיסק (ואז גם ברור שהוא מתחיל ב־$\neg\neg$) או ש־$B \in \{\neg\neg p_1\}$ וגם במקרה זה B מתחיל ב־$\neg\neg$.

ג. נפריך: נגדיר $\Gamma = \varnothing$ ו־$A = A_3$. ברור כי $\Gamma \vdash_{H^*} A$ כי היא אקסיומה ולכן היא הוכחה תקינה באורך 1. נניח בשלילה ש־$\varnothing \vdash_{\text{HPC}} A_3$, אז ממשפט השלמות עבור HPC מתקיים $\varnothing \vDash A_3$ כלומר A_3 טאוטולוגיה (הרי $\varnothing$ תמיד מסופקת באופן ריק). זאת בסתירה לכך שהראינו שבסביבה $\rho\left(x\right) = \text{false}, \rho\left(y\right) = \text{true}, \rho\left(z\right) = \text{false}$ ערך האמת של A_3 הוא false.

שאלה 3

תהיה Γ קבוצת נוסחאות ללא כמתים מעל המילון $\Sigma = \left\{R^2\right\}$ כך ש־$\forall A \in \Gamma.\text{FreeVar}\left(A\right) \subseteq \{x_1, x_2, x_3\}$.
הוכיחו/הפריכו: קיימת תת־קבוצה סופית $\triangle \subseteq \Gamma$ כך שלכל $A \in \Gamma$ קיים $\delta \in \Delta$ כך ש־A שקולה ל־δ.

פתרון

נוכיח. תחילה נשים לב שבכל $A \in \Gamma$ מופיעים רק משתנים מבין $\{x_1, x_2, x_3\}$, מכיוון שאין בה כמתים ו־$\text{FreeVar}\left(A\right) \subseteq \{x_1, x_2, x_3\}$. כעת, מכיוון שאין לנו סימני פונקציה או קבועים, A חייבת להיות איזושהי הרכבה של $\neg, \wedge, \vee$ עם $R\left(x, y\right)$ כאשר $x, y \in \{x_1, x_2, x_3\}$. כלומר, A חייבת להיות איזשהו פסוק עם המשתנים $\{R\left(x_i, x_j\right) : 1 \leq i, j \leq 3\}$. מכיוון שיש רק 9 משתנים בפסוק, מספר הפסוקים השונים שאינם שקולים הוא 2^{2^9}. זה בפרט סופי ולכן קיימת $\triangle$ כזו.

שאלה 4

יהי M מבנה למילון Σ המכיל סימן פונקציה f^1. נאמר שאיבר $b \in D^M$ הוא בעל מחזור n־י אמ"מ $b = \underbrace{f^M\left(f^M\left(\ldots\left(f^M\left(b\right)\right)\right)\right)}_{n \text{ times}}$.

הוכיחו/הפריכו: קיים פסוק A מעל Σ כך ש־A נכון אמ"מ יש ב־M איבר עם מחזור ראשוני.

פתרון

נניח בשלילה שקיים פסוק A כזה, אז A נכון גם מעל $\Sigma' = \Sigma \cup \{=\}$. נחתור לקבל סתירה למשפט הקומפקטיות. נגדיר $\Gamma = \{A\} \cup \{\neg\varphi_p\}_{p \text{ prime}}$ כאשר $\varphi_p := \exists b.b = \underbrace{f\left(f\left(\ldots\left(f\left(b\right)\right)\right)\right)}_{p \text{ times}}$. אז Γ איננה ספיקה – כי לפי ההנחה, אם A מסתפקת אז יש ב־M איבר עם מחזור p ראשוני כלשהו ואז $\neg\varphi_p$ לא מסתפקת. כעת נראה שכל תת־קבוצה סופית של Γ ספיקה, וזו תהיה סתירה למשפט הקומפקטיות. תהי $\triangle \subseteq \Gamma$ סופית, אז קיים p מקסימלי

עבורו $\neg\varphi_p \in \triangle$ ולכן קיים $q > p$ ראשוני כך ש־$\neg\varphi_q \notin \triangle$. נסתכל על המבנה $D^M = \{0, 1, 2, \ldots, q-1\}$ שבו $f^M(x) = \begin{cases} x+1 & x \neq q-1 \\ 0 & x = q-1 \end{cases}$.
במבנה הזה אין אף איבר מסדר קטן מ־q (כי זה מבנה של חיבור מודולו q) ולכן כל ה־$\triangle \ni \neg\varphi_p$ מסתפקים. בנוסף, 0 הוא איבר מסדר q ולכן A מסתפק, כלומר במבנה הזה $\triangle$ מסתפקת כנדרש.

שאלה 5

הוכיחו/הפריכו:

א. אם A נוסחה ספיקה, אז היא ספיקה במבנה שתחומו הוא קבוצה חלקית של המספרים הזוגיים.

ב. אם Γ קבוצת נוסחאות ספיקה מסדר ראשון, אז היא עקבית (במערכת HC).

ג. האם $A \vDash_t B$ כאשר:

$$A(x,y) := (\forall x (B(x) \to T(x))) \wedge (\forall x \forall y (M(x,y) \to (T(x) \to T(y)))) \wedge M(x,y)$$
$$B(x,y) := \neg T(y) \to \neg B(x)$$

פתרון

א. נוכיח: ראינו שאם A נוסחה ספיקה, אז היא ספיקה במבנה M'לכל היותר בן־מנייה. לכן $\left|D^{M'}\right| = \aleph_0$ כלומר קיימת f חח"ע ועל מ־$D^{M'}$ ל־$D^M = \{2n : n \in \mathbb{N}\}$ כל המספרים הזוגיים. נפרש את כל הקבועים, הפונקציות והיחסים לפי הפירוש שלהם ב־M' ואחריו f, ונקבל שמתקיים $[|A|]^M_\rho = [|A|]^{M'}_\rho$ (נוכיח באמצעות אינדוקציה מבנית).

ב. נפריך: נגדיר $\Gamma = \{x = 1, \exists x. \neg(x = 1)\}$ מעל מבנה הטבעיים. קודם כל Γ ספיקה בסביבה שבה $\rho(x) = 1$. כעת, אנחנו יודעים ש־Γ עקבית אמ"מ היא נכונה באיזשהו מבנה, אבל לא ייתכן ש־Γ נכונה באף מבנה: אם הנוסחה השנייה מסתפקת, בהכרח קיימת סביבה שבה הנוסחה הראשונה אינה מסתפקת.

ג. נוכיח: יהי M מבנה ותהי ρ סביבה כך ש־$[|A|]^M_\rho = \text{true}$ ונראה שגם $[|B|]^M_\rho = \text{true}$. מכך ש־$[|A|]^M_\rho = \text{true}$ נסיק ש־$[|M(x,y)|]^M_\rho =$ true, ש־$[|B(x) \to T(x)|]^M_\rho = \text{true}$ (מכיוון ש־$[|\forall x (B(x) \to T(x))|]^M_\rho = \text{true}$ ובפרט עבור $\rho(x)$) וגם ש־$[|T(x) \to T(y)|]^M_\rho = \text{true}$ (באופן דומה). מכך נקבל $[|B(x) \to T(y)|]^M_\rho = \text{true}$ כלומר $[|\neg T(y) \to \neg B(x)|]^M_\rho = \text{true}$ כנדרש.

4 תשפ"ב סמסטר ב' מועד א'

שאלה 1

הוכיחו/תנו דוגמה נגדית:

א. האם יש נוסחה $F(X)$ בלוגיקה מונאדית מסדר שני מעל המילון $\Sigma := \{<\}$ כך שלכל M, ρ:

$$M, \rho \vDash F(X) \text{ if and only if } \rho(X) \text{ is a finite set}$$

ב. תהיה $A(x_1, \ldots, x_n)$ נוסחה בלי סימני פונקציה, קבועים וכמתים. האם $A^\forall$ ספיקה אמ"מ היא ספיקה במבנה בגודל 1?

ג. האם יש נוסחה A כך ש-$A^\forall$ לא ספיקה וגם $A^\exists$ תקפה?

ד. האם לכל פסוק מעל קבוצת הקשרים $\{\wedge, \vee\}$ יש פסוק שקול סמנטית מעל קבוצת הקשרים $\{\wedge\}$?

פתרון

א. כן, נצרין את הנוסחה "קיים יחס סדר מלא ללא איבר מקסימלי על איברי $\rho(X)$":

$$F(X) := \exists f.\text{Transitive}(X) \wedge \text{Anti-Symmetric}(X) \wedge \forall y \exists z. X(y, z)$$

כאשר

$$\begin{aligned} \text{Transitive}(X) &:= \forall x \forall y \forall z. X(x, y) \wedge X(y, z) \rightarrow X(x, z) \\ \text{Anti-Symmetric}(X) &:= \forall x \forall y. X(x, y) \rightarrow \neg X(y, z) \end{aligned}$$

ב. נוכיח. ברור שאם $A^\forall$ ספיקה במבנה בגודל 1 אז היא ספיקה (לפי הגדרה, הרי מצאנו מבנה בו היא ספיקה), ולכן נניח ש-$A^\forall$ ספיקה במבנה M וסביבה ρ ונראה ש-$A^\forall$ ספיקה במבנה M' בגודל 1. יהי $a \in D^M$ כלשהו ונגדיר $D^{M'} = \{a\}$. נפרש כל יחס k-מקומי כצמצום של הפירוש שלו ב-M ל-$\{a\}^k$, דהיינו,

$$R^{M'}(a, a, \ldots, a) = \begin{cases} \text{true} & R^M(a, a, \ldots, a) \\ \text{false} & \text{otherwise} \end{cases}$$

נפרש כל פונקציה כמשהו שמחזיר תמיד a ואת כל הקבועים כ-a (כלומר אפשר להניח שאין פונקציות/קבועים). כעת, ידוע כי $[|A^\forall|]_\rho^M = \text{true}$ כלומר $[|\forall x_1 \forall x_2 \ldots \forall x_n A|]_\rho^M = \text{true}$ ובפרט עבור ההצבה נקבל

$$[|\forall x_1 \forall x_2 \ldots \forall x_n A|]^M_{\rho\left[\frac{a}{x_1}\right]\left[\frac{a}{x_2}\right]\cdots\left[\frac{a}{x_n}\right]} = \left[\left|A\left\{\frac{a}{x_1}\right\}\ldots\left\{\frac{a}{x_n}\right\}\right|\right]^M_\rho = [|A^\forall|]^{M'}_\rho = \text{true}$$

ג. לא. נניח ש-$A^\exists$ תקפה, בפרט היא נכונה במבנה בגודל 1, לכן $A^\forall$ (ששקולה ל-$A^\exists$ במבנה בגודל 1) גם כן נכונה באותו מבנה, כלומר $A^\forall$ ספיקה.

ד. לא: נתבונן בפסוק $p_1 \vee p_2$. נוכל להוכיח באינדוקציה מבנית שכל פסוק מעל קבוצת הקשרים $\{\wedge\}$ שקול סמנטית ל-$\wedge_{i \in I} p_i$ כאשר $I \subseteq \mathbb{N}$ סופית כלשהי ולא ריקה. אזי, נשים לב שהפסוק $p_1 \vee p_2$ מסתפק בסביבה בה $p_1 = \text{true}, p_2 = \text{false}, \forall n > 2 : p_n = \text{false}$ ולכן בפרט $I \subseteq \{p_1\}$ (אחרת, הפסוק האחר לא מסתפק בסביבה זו). מכאן, פשוט נשים לב ש-$p_1 \vee p_2$ לא שקול ל-p_1, וגם מסימטריה היינו יכולים לקבל ש-$I \subseteq \{p_2\}$. בכל מקרה זה מסיים את ההפרכה.

שאלה 2

א. תנו מילון מתאים להצרנת הטענות הבאות והצרינו אותן:

(1) שלילת טענה כלשהי x מתיישבת עם טענה כלשהי y אמ"מ x מתיישבת עם שלילת y.

(2) קיימת טענה y שמתיישבת עם B ששלילתה מתיישבת עם A.

(3) טענה כלשהי x מתיישבת עם טענה כלשהי y אמ"מ x לא מתיישבת עם שלילת y.

(4) אם טענה x כלשהי מתיישבת עם טענה y כלשהי ו-z מתיישבת עם y אז z מתיישבת עם x.

(5) A לא מתיישבת עם B.

ב. היעזרו במשפט הרברנד כדי להוכיח שהטענה האחרונה נובעת מקודמותיה.

פתרון

א. נגדיר $\Sigma = \{f_{\text{Negate}}, R_{\text{Agree}},\} \cup \{A, B\}$ כאשר A, B קבועים. נצריך:

(1)

$$\forall x \forall y . R_{\text{Agree}}\left(f_{\text{Negate}}(x), y\right) \iff R_{\text{Agree}}\left(x, f_{\text{Negate}}(y)\right)$$

(2)

$$\exists y . R_{\text{Agree}}(y, B) \wedge R_{\text{Agree}}\left(f_{\text{Negate}}(y), A\right)$$

(3)

$$\forall x \forall y . R_{\text{Agree}}(x, y) \iff \neg R_{\text{Agree}}\left(x, f_{\text{Negate}}(y)\right)$$

(4)

$$\forall x \forall y \forall z . R_{\text{Agree}}(x, y) \wedge R_{\text{Agree}}(z, y) \rightarrow R_{\text{Agree}}(z, x)$$

(5)

$$\neg R_{\text{Agree}}(A, B)$$

ב. תחילה, הטענה האחרונה נובעת מקודמותיה אמ"מ הקבוצה $A' = \{A_1, A_2, A_3, A_4, \neg A_5\}$ איננה ספיקה. כעת, ממשפט סקולם, A' איננה ספיקה אמ"מ $\text{sk}(A')$ איננה ספיקה מעל מילון מורחב. נשים לב שהמילון המורחב יכלול רק עוד סימן קבוע C עבור טענה 2. ממשפט הרברנד, $\text{sk}(A')$ אינה ספיקה אמ"מ $\text{GrIns}(\text{sk}(A'))$ אינה ספיקה. לכן, מספיק שנמצא תת־קבוצה של $\text{GrIns}(\text{sk}(A'))$ שאיננה ספיקה. אכן, מטענה 2 נקבל:

$$R_{\text{Agree}}(C, B) \wedge R_{\text{Agree}}\left(f_{\text{Negate}}(C), A\right)$$

מטענה 1 עבור ההצבה $x = C, y = A$ נקבל

$$R_{\text{Agree}}\left(f_{\text{Negate}}(C), A\right) \iff R_{\text{Agree}}\left(C, f_{\text{Negate}}(A)\right)$$

לכן נקבל ש־$R_{\text{Agree}}\left(C, f_{\text{Negate}}(A)\right)$. מטענה 3 עבור ההצבה $x = C, y = A$ נקבל

$$R_{\text{Agree}}(C, A) \iff \neg R_{\text{Agree}}\left(C, f_{\text{Negate}}(A)\right)$$

ולכן $\neg R_{\text{Agree}}(C, A)$. משלילת טענה 5 נקבל $R_{\text{Agree}}(A, B)$ ומטענה 4 עבור ההצבה $x = A, y = B, z = C$ נקבל

$$R_{\text{Agree}}(A, B) \wedge R_{\text{Agree}}(C, B) \rightarrow R_{\text{Agree}}(C, A)$$

ולכן תת־הקבוצה הזו איננה ספיקה: הראינו שאם כל הנ"ל מסתפקים, אז $\neg R_{\text{Agree}}(C, A)$ ו־$R_{\text{Agree}}(C, A)$ מסתפקים – וזה בוודאי לא אפשר באותה סביבה.

שאלה 3

יהיו $\Sigma_1 := \{R, =\}$ ו־$\Sigma_2 = \Sigma_1 \cup \{c\}$ מילונים. לכל מבנה M למילון Σ_1 נגדיר מבנה M^* למילון Σ_2 כך:

- $D^{M^*} := D^M \cup \{a\}$ כאשר $a \notin D^M$.
- $c^{M^*} := a$.
- $R^{M^*}(b_1, b_2)$ אמ"מ $R^M(b_1, b_2)$ או ש־$b_1 = a$ או ש־$b_2 = a$.

הוכיחו שיש אלגוריתם שמקבל פסוק A מעל Σ_1 ומחזיר פסוק $T(A)$ מעל Σ_2 כך ש־A ספיק ב־M אמ"מ $T(A)$ ספיק ב־M^*.

פתרון

תחילה נמיר את A לצורת PNF. כעת, נגדיר את האלגוריתם T בצורה אינדוקטיבית:

- $T(p_i) = p_i$ לכל משתנה p_i.
- קשרים גם כן ללא שינוי:

$$T(\neg\varphi) = \neg T(\varphi)$$
$$T(\varphi \wedge \psi) = T(\varphi) \wedge T(\psi)$$
$$T(\varphi \vee \psi) = T(\varphi) \vee T(\psi)$$

- $T(R(b_1, b_2)) = R(b_1, b_2) \wedge \neg(b_1 = c) \wedge \neg(b_2 = c)$.
- $T(\forall x\varphi) = \forall x.x = c \vee T(\varphi)$ ו־$T(\exists x\varphi) = \exists x.\neg(x = c) \wedge T(\varphi)$.

כעת יהי A פסוק, יהי M מבנה ותהי ρ סביבה בו. נוכיח ש־$[|A|]_\rho^M = \text{true}$ אמ"מ $[|T(A)|]_\rho^{M^*} = \text{true}$ באינדוקציה מבנית על A. נשים לב שהסביבה ρ משותפת לשני המבנים.
<u>בסיס:</u> אם A משתנה, זה ברור לפי הגדרה.
<u>צעד:</u> נניח שהטענה מתקיימת עבור φ, ψ. ברור שהיא מתקיימת עבור $\neg\varphi, \varphi \wedge \psi, \varphi \vee \psi$ כי:

$$[|\neg\varphi|]_\rho^M = \text{true} \iff [|\varphi|]_\rho^M = \text{false} \iff [|\neg\varphi|]_\rho^{M^*} = \text{true} \iff [|T(\varphi)|]_\rho^{M^*} = \text{true}$$

באופן זהה עבור $\wedge, \vee$. כעת, נראה שהטענה מתקיימת עבור $\forall x.\varphi$ ו־$\exists x.\varphi$:

$$[|\forall x.x = c \vee T(\varphi)|]_\rho^{M^*} = \text{true} \iff [|\forall x.\varphi|]_\rho^M = \text{true}$$

$$[|\exists x.\neg(x = c) \wedge T(\varphi)|]_\rho^{M^*} = \text{true} \iff [|\exists x.\varphi|]_\rho^M = \text{true}$$

שאלה 4

יהיו $\triangle(x) := \{\delta_i(x)\}_{i\in\mathbb{N}}$ ו־$\Gamma(x) = \{\gamma_i(x)\}_{i\in\mathbb{N}}$ קבוצות נוסחאות שהמשתנה החופשי היחיד בהן הוא x. נתון שלכל מבנה M וסביבה ρ, אם Γ מסתפקת ב־M, ρ אז יש לפחות נוסחה אחת ב־$\triangle$ שמסתפקת ב־M, ρ.

א. הוכיחו/הפריכו: יש תת־קבוצות סופיות $\Gamma_1 \subseteq \Gamma$ ו־$\triangle_1 \subseteq \triangle$ כך שלכל מבנה M וסביבה ρ, אם Γ_1 מסתפקת ב־M, ρ אז יש לפחות נוסחה אחת ב־$\triangle_1$ שמסתפקת ב־M, ρ.

ב. הוכיחו/הפריכו: יש תת־קבוצות סופיות $D, K \subseteq \mathbb{N}$ כך שהפסוק הבא תקף:

$$\forall x \left(\bigwedge_{i\in D} \gamma_i(x) \to \bigwedge_{i\in K} \delta_i(x) \right)$$

פתרון

א. נוכיח: מהנתון, אנחנו יודעים ש־$\Gamma \cup \{\neg\varphi : \varphi \in \triangle\}$ אינה ספיקה (כי אילו הייתה ספיקה, היה מבנה וסביבה בהם Γ מסתפקת וגם אף נוסחה ב־$\triangle$ אינה מסתפקת). מקומפקטיות נקבל שקיימת תת־קבוצה סופית שאינה ספיקה $\Gamma_1 \cup \{\neg\varphi : \varphi \in \triangle_1\}$. לכן, לכל מבנה M וסביבה ρ, אם Γ_1 מסתפקת אז בהכרח קיים $\neg\varphi$ שאינו מסתפק עבור $\varphi \in \triangle_1$ כלומר φ מסתפק כנדרש.

ב. סעיף זה שקול לסעיף הקודם. נוכיח: מהנתון, אנחנו יודעים ש־$\Gamma \cup \{\neg\varphi : \varphi \in \triangle\}$ אינה ספיקה (כי אילו הייתה ספיקה, היה מבנה וסביבה בהם Γ מסתפקת וגם אף נוסחה ב־$\triangle$ אינה מסתפקת). מקומפקטיות נקבל שקיימת תת־קבוצה סופית שאינה ספיקה $DK := \Gamma_1 \cup \{\neg\varphi : \varphi \in \triangle_1\}$ ועבורה נשים לב שהפסוק הנ"ל תקף (ז"א אם נסמן $D = \{i : \gamma_i \in \Gamma_1\}$ ו־$K = \{i : \delta_i \in \triangle_1\}$), מכיוון שלכל M ולכל ρ אנחנו יודעים ש־DK אינה מסתפקת ולכן אם Γ_1 מסתפקת, דהיינו $\forall x \wedge_{i\in D} \gamma_i(x)$ אז קיים $\neg\varphi \in \triangle_1$ שאינו מסתפק, דהיינו קיים $i \in K$ כך ש־$\delta_i(x)$ מסתפק.

שאלה 5

תרגיל זה עוסק בתחשיב הפסוקים. לכל נוסחה בתחשיב הפסוקים ψ נסמן ב־$\mathrm{Con}\left(\psi\right)$ את קבוצת הקשרים המופיעים בה ונסמן ב־$\mathrm{Var}\left(\psi\right)$ את קבוצת המשתנים שמופיעים בה. תהי A נוסחה כך ש־$\mathrm{Con}\left(A\right)\subseteq\left\{ \neg,\to\right\}$ ו־$\mathrm{Var}\left(A\right)\subseteq\left\{ p_{1},\dots,p_{n}\right\}$. נגדיר

$$F_{A}:=\left\{ A\left\{ \frac{B_{1}}{p_{1}},\dots,\frac{B_{n}}{p_{n}}\right\} :\mathrm{Con}\left(B_{i}\right)\subseteq\left\{ \neg,\to\right\} \right\}$$

א. הוכיחו/הפריכו: אם A משפט של HPC אז F_{A} עקבית ב־HPC.

ב. הוכיחו/הפריכו: אם F_{A} עקבית ב־HPC אז A משפט של HPC.

פתרון

א. נוכיח. תחילה, אם A משפט של HPC אז ממשפט השלמות A טאוטולוגיה. כעת נראה ש־F_{A} מכילה רק טאוטולוגיות: לפי משפט הקשר בין הצבות לעדכון סביבות, אנחנו יודעים ש־

$$\left[\left|A\left\{ \frac{B_{1}}{p_{1}},\dots,\frac{B_{n}}{p_{n}}\right\} \right|\right]_{\rho}=\left[\left|A\right|\right]_{\rho\left[\frac{\left[\left|B_{1}\right|\right]_{\rho}}{p_{1}}\right]\dots\left[\frac{\left[\left|B_{n}\right|\right]_{\rho}}{p_{n}}\right]}=\mathrm{true}$$

כי A טאוטולוגיה. לכן בפרט F_{A} ספיקה, ולכן היא עקבית.

ב. נוכיח. אם F_{A} עקבית ב־HPC אז היא ספיקה. נראה ש־A היא טאוטולוגיה ונקבל ממשפט השלמות ש־A משפט ב־HPC. אכן, לפי משפט הקשר בין הצבות לעדכון סביבות,

$$\left[\left|A\left\{ \frac{B_{1}}{p_{1}},\dots,\frac{B_{n}}{p_{n}}\right\} \right|\right]_{\rho}=\left[\left|A\right|\right]_{\rho\left[\frac{\alpha_{1}}{p_{1}}\right]\dots\left[\frac{\alpha_{n}}{p_{n}}\right]}=\mathrm{true}$$

עבור כל $\alpha_{1},\dots\alpha_{n}\in\left\{ \mathrm{true},\mathrm{false}\right\}$, מכיוון שניתן לבטא בנוסחאות עם $\mathrm{Con}\left(\neg,\to\right)$ טאוטולוגיות וסתירות (למשל $x\to x$ היא טאוטולוגיה, ו־$\neg\left(x\to x\right)$ סתירה).

5 תשפ"ב סמסטר ב' מועד ב'

שאלה 2

תהי Γ קבוצה עקבית ב־HC ויהיו A, B פסוקים שאינם ב־Γ.
הוכח/הפרך: $\Gamma \cup \{A\}$ עקבית ב־HC או ש־$\Gamma \cup \{A \to B\}$ עקבית ב־HC.

פתרון

נוכיח. נניח ש־$\Gamma \cup \{A\}$ איננה עקבית כלומר ממשפט השלמות $\Gamma \cup \{A\}$ אינה נכונה באף מבנה. כעת, מכיוון ש־Γ כן עקבית, קיים מבנה בו היא נכונה, נסמנו ב־M. מכיוון ש־$\Gamma \cup \{A\}$ לא נכונה בפרט במבנה זה, A לא נכונה ב־M. לכן $\neg A$ כן נכונה ב־M (והרי A פסוק). לכן $\Gamma \cup \{\neg A\}$ נכונה במבנה, לכן גם $\Gamma \cup \{A \to B\}$ נכונה במבנה, ולכן $\Gamma \cup \{A \to B\}$ עקבית כנדרש.

שאלה 3

א. נניח שאותם פסוקים נכונים במבנים M, N. האם הם איזומורפיים?

ב. חשבו את $A\left\{\frac{f(x,z)}{y}\right\}$ עבור

$$A = \forall x \exists z \left(P\left(x, z\right) \to P\left(y, v\right) \land \exists u \left(R\left(y, y\right)\right)\right) \land \exists x \exists y U\left(x, y, z\right)$$

ג. האם יש נוסחה ספיקה בלי שיוויון שספיקה רק במבנים סופיים?

ד. נתון ש־A, B שקולים. האם גם $\mathrm{sk}\left(A\right), \mathrm{sk}\left(B\right)$ שקולים?

ה. תהי $\Gamma \cup \{A\}$ קבוצת נוסחאות. האם $\Gamma^{\exists} \vDash_t A^{\exists}$ אמ"מ $\Gamma^{\forall} \vDash_t A^{\forall}$?

פתרון

א. נניח שאותם פסוקים נכונים במבנים M, N. האם הם איזומורפיים? לא. נסתכל על מילון $\Sigma = \left\{R^1\right\}$, מבנה M עבורו $D^M = \{1, 2\}$ ו־$R^M = \{1, 2\}$ ומבנה אחר $D^N = \{1\}$ ו־$R^N = \{1\}$. נוכל להוכיח באינדוקציה מבנית שפסוק נכון ב־M אמ"מ הוא נכון ב־N, אבל המבנים אינם איזומורפיים כי התחומים אינם מאותה עוצמה (ולכן לא קיימת f הפיכה ביניהם).

ב. תחילה נכתוב נוסחה שקולת שלד שבה אין את x, y, z:

$$\forall a \exists c \left(P\left(a, c\right) \to P\left(y, v\right) \land \exists u \left(R\left(y, y\right)\right)\right) \land \exists a \exists b U\left(a, b, z\right)$$

כעת נעשה Find And Replace:

$$\forall a \exists c \left(P\left(a, c\right) \to P\left(f\left(x, z\right), v\right) \land \exists u \left(R\left(f\left(x, z\right), f\left(x, z\right)\right)\right)\right) \land \exists a \exists b U\left(a, b, z\right)$$

ג. לא. נשים לב שאם φ ספיקה ב־M בלי שיוויון, ניקח $a \in D^M$ כלשהו ונשים לב שהיא גם ספיקה ב־M' שתחומו $D^M \cup \{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ עם אותם הפירושים (כאשר כל הפונקציות והיחסים עם a_k זהים לפונקציות והיחסים עבור a), ולכן φ ספיקה גם במבנה אינסופי.

ד. נפריך (אינטואיציה: קיים הופך להוספת קבוע חדש, וייתכן שמבנה כלשהו לא יגדיר אותו להיות "הקבוע המתאים"). נגדיר $A := \exists x . x = 0$ ו־$B := 0 = 0$. שניהם נכונים בכל מבנה (חייבים לתת איזשהו פירוש לקבוע 0 ואם נציב את הפירוש הזה ב־x נקבל ש־A נכון). עם זאת, $\mathrm{sk}\left(A\right) = c = 0$ עם קבוע חדש, ו־$\mathrm{sk}\left(B\right) = B$, כלומר $\mathrm{sk}\left(B\right)$ עדיין נכון בכל מבנה, אבל $\mathrm{sk}\left(A\right)$ אינו מסתפק למשל במבנה שמפרש את c בתור 1 ואת 0 בתור 0.

ה. נפריך. נגדיר $\Gamma = \{R\left(x\right)\}$ ו־$A = \{\forall x . R\left(x\right)\}$. ברור ש־$\Gamma^{\forall} \vDash_t A^{\forall}$ כי נוסחאות אלו שוות, ועם זאת $\Gamma^{\exists} \nvDash_t A^{\exists}$ (כלומר $\exists x . R\left(x\right) \nvDash_t \forall x . R\left(x\right)$) למשל במבנה בו $D^M = \{1, 2\}$, $R = \{1\}$, בכל סביבה שהיא ($\Gamma^{\exists}$ מסתפקת אבל $A^{\exists}$ לא).

שאלה 5

א. תנו מילון מתאים להצרנת הטענות הבאות והצרינו אותן:

(1) אם z יכיחה מ־x אז לכל y, z יכיחה גם מאיחוד x עם y.

(2) אם y יכיחה מ־x וגם z יכיחה מאיחוד x עם y, אז z יכיחה מ־x.

(3) קיימת y כך ש־y לא עקבית וגם y יכיחה מ־S.

(4) לכל x, x עקבית אמ"מ קיימת טענה y כך ש־y לא יכיחה מ־x.

(5) S לא עקבית.

ב. תוכלו להניח שאיחוד הוא סימטרי. האם הטענה האחרונה נובעת מהאחרות? אם כן, הוכיחו זאת באמצעות משפט הרברנד.

פתרון

א. נגדיר $\Sigma = \left\{R^2_{\text{Provable}}, R^1_{\text{Consistent}}, f^2_{\cup}, S\right\}$ כאשר S קבוע, $f_{\cup}$ פונקציה ו־$R_{\text{Consistent}}$ ו־R_{Provable} יחסים. נצרין:

(1)

$$\forall x \forall z R_{\text{Provable}}\left(x,z\right) \to \forall y . R_{\text{Provable}}\left(f_{\cup}\left(x,y\right),z\right)$$

(2)

$$\forall x \forall y \forall z . R_{\text{Provable}}\left(x,y\right) \land R_{\text{Provable}}\left(f_{\cup}\left(x,y\right),z\right) \to R_{\text{Provable}}\left(x,z\right)$$

(3)

$$\exists y . \neg R_{\text{Consistent}}\left(y\right) \land R_{\text{Provable}}\left(S,y\right)$$

(4)

$$\forall x . R_{\text{Consistent}}\left(x\right) \iff \exists y . \neg R_{\text{Provable}}\left(x,y\right)$$

(5)

$$\neg R_{\text{Consistent}}\left(S\right)$$

ב. כן. תחילה נשים לב שטענה 5 נובעת מקודמותיה אמ"מ $A' = \left\{A_1, A_2, A_3, A_4, \neg A_5\right\}$ אינה ספיקה. נעשה סקולמיזציה לנוסחאות: לשם כך, נוסיף קבוע P עבור טענה 3, ונשים לב שטענה 4 היא:

$$\forall x . \left(R_{\text{Consistent}}\left(x\right) \land \exists y . \neg R_{\text{Provable}}\left(x,y\right)\right) \lor \left(\neg R_{\text{Consistent}}\left(x\right) \land \neg \exists y . \neg R_{\text{Provable}}\left(x,y\right)\right)$$

כלומר הסקולמיזציה שלה היא הוספת פונקציה חדשה f, ונקבל:

$$\forall x . \left(R_{\text{Consistent}}\left(x\right) \land \neg R_{\text{Provable}}\left(x,f\left(x\right)\right)\right) \lor \left(\neg R_{\text{Consistent}}\left(x\right) \land \forall y . R_{\text{Provable}}\left(x,y\right)\right)$$

כעת ממשפט סקולם A' אינה ספיקה אמ"מ $\text{sk}\left(A'\right)$ אינה ספיקה, וממשפט הרברנד זה מתקיים אמ"מ $\text{GrIns}\left(\text{sk}\left(A'\right)\right)$ אינה ספיקה. נמצא תת־קבוצה סופית של $\text{GrIns}\left(\text{sk}\left(A'\right)\right)$ שאינה ספיקה באמצעות ההצבות הבאות:

מטענה 5,

$$R_{\text{Consistent}}\left(S\right)$$

מטענה 3,

$$\neg R_{\text{Consistent}}\left(P\right) \land R_{\text{Provable}}\left(S,P\right)$$

מטענה 4 (עבור ההצבה $x=S$ ובהנחה שהסביבה מספקת את טענה 5),

$$\neg R_{\text{Provable}}\left(S,f\left(S\right)\right)$$

מטענה 4 (עבור ההצבה $x=P$ ו־$y=f\left(S\right)$ ובהנחה שהסביבה מספקת את טענה 3),

$$R_{\text{Provable}}\left(P,f\left(S\right)\right)$$

מטענה 1 (עבור ההצבה $x=S,y=P,z=f\left(S\right)$),

$$R_{\text{Provable}}\left(S,P\right)\rightarrow R_{\text{Provable}}\left(f_{\cup}\left(S,P\right),f\left(S\right)\right)$$

מטענה 2 (עבור ההצבה $x=S,y=P,z=f\left(S\right)$),

$$R_{\text{Provable}}\left(S,P\right)\wedge R_{\text{Provable}}\left(f_{\cup}\left(S,P\right),f\left(S\right)\right)\rightarrow R_{\text{Provable}}\left(S,f\left(S\right)\right)$$

נשים לב שתת־קבוצה זו אינה ספיקה – כי אם כל הטענות הנ"ל מסתפקות, אז $R_{\text{Provable}}\left(S,f\left(S\right)\right)$ ו־$\neg R_{\text{Provable}}\left(S,f\left(S\right)\right)$ מסתפקות וזו סתירה.