תרגול 9

24 במאי 2017

הגדרה 0.1 נוסחה בצורה נורמלית PNF אם היא $Q_1x_1,...,Q_nx_n\varphi$
כאשר φ ללא כמתים.

טענה 0.2 לכל נוסחה יש נוסחה בצורת PNF השקולה לה.

תרגיל: העבירו את $\varphi\left\{c/z\right\}$ לPNF:

$$\varphi=\left(\exists x\forall yR\left(x,y,z\right)\right)\rightarrow\left(\neg\exists x\forall yp\left(x,y\right)\right)$$

פתרון:

$$\neg\exists x\forall yp\left(x,y\right)\equiv\forall x\neg\forall yp\left(x,y\right)$$

$$\equiv\forall x\exists y\neg p\left(x,y\right)$$

$$\equiv\forall v\exists w\neg p\left(v,w\right)\text{ - }\left(\alpha\right)\text{ rule}$$

שקילויות:

$$x\notin Free\left(A\right)\left(\exists xB\right)\rightarrow A\equiv\forall x\left(B\rightarrow A\right)$$

$$x\notin Free\left(A\right)\left(\forall xB\right)\rightarrow A\equiv\exists x\left(B\rightarrow A\right)$$

$$A\rightarrow\forall xB\equiv\forall x\left(A\rightarrow B\right)$$

המשך פתרון:
* לסוגריים מסולסלים יש כאן משמעות זהה לעגולים, נוסף רק כדי שניהיה נוח להבדיל בין הסוגרים

$$\varphi\left\{c/z\right\}\equiv\left(\exists x\forall yR\left(x,y,c\right)\right)\rightarrow\left(\forall v\exists w\neg p\left(v,w\right)\right)$$

$$\equiv\forall x\left\{\left(\forall yR\left(x,y,c\right)\right)\rightarrow\left(\forall v\exists w\neg p\left(v,w\right)\right)\right\}$$

$$\equiv\forall x\exists y\left\{R\left(x,y,c\right)\rightarrow\left(\forall v\exists w\neg p\left(v,w\right)\right)\right\}$$

$$\equiv\forall x\exists y\forall v\exists w\left(R\left(x,y,c\right)\rightarrow\neg p\left(v,w\right)\right)$$

מוסכמה : נקרא לקבועים גם פונקציות, פשוט מערכיות 0 (מקבלות 0 משתנים).

אלגוריתם: סקולהם לציאת פסוק אוניברסאלי שקול מבחינת ספיקות לנוסחה.
קלט: נוסחה φ במילון Σ
פלט: נוסחה ללא כמתים φ' במילון Σ'
א) Σ' הרחבה של Σ בפונקציות
ב) $sk(\varphi) := \varphi'^{\forall}$ ספיקה אם ורק אם φ ספיקה.

פסאודו קוד: .

1. החלפת המשתנים החופשיים של φ בקבועים חדשים
2. להעביר לצורת PNF
3. סילוק כמתי ה$\exists$ מבחוץ פנימה:

$$\forall x_1,...,x_n \exists y \tau \Rightarrow \forall x_1,...,x_n \tau \left\{ f\left(x_1,...,x_n\right)/y \right\}$$

ניתן להרחיב את האלגוריתם לקבוצת נוסחאות במקום נוסחה יחידה

פסאודו קוד: .

1. כמו בסקולהם **באחידות**
2. כמו בסקוהלם
3. כמו בסקולהם **בנפרד**

תרגיל: מצא נוסחה ללא כמתים כך שהסגור האוניברסלי שלה ספיק אמ"מ φ ספיקה.

פתרון: נשתמש באלגוריתם על φ

1. נקבל את $\varphi\left\{x/z\right\}$
2. העברנו לPNF בתרגיל הקודם
3.

$$\forall x \exists y \forall v \exists w \left(R\left(x,y,x\right) \to \neg p\left(v,w\right)\right)$$

$$\Rightarrow \forall x \forall v \exists w \left(R\left(x,f\left(x\right),x\right) \to \neg p\left(v,w\right)\right)$$

$$\Rightarrow \forall x \forall v \left(R\left(x,f\left(x\right),x\right) \to \neg p\left(v,g\left(x,v\right)\right)\right)$$

$$= sk\left(\left(R\left(x,f\left(x\right),x\right) \to \neg p\left(v,g\left(x,v\right)\right)\right)\right)$$

כאשר G,F,C סימני פונקציה חדשים
קיבלנו נוסחה ללא כמתים $R\left(x,f\left(x\right),c\right) \to \neg p\left(v,g\left(x,v\right)\right)$
שהסגור האוניברסלי שלה ספיק אמ"מ φ ספיקה

הגדרה 0.3 מבנה הרברנד
מבנה שבו לכל איבר בתחום יש שם עצם סגור יחודיי המפורש אליו.

$$\forall a \exists ! t_a \left[\left|t_a\right|\right]^H = a$$

הערה 0.4 אם במילון אין קבוע - אין מבנה הרבדרנד כי אין ש"ס.
אם במילון יש קבוע, אז יש מבנה הרברנד טבעי:
נבחר את התחום להיות בדיוק כל שמות העצם הסגורים,

$$f^H\left(t_1,...,t_n\right) = f\left(t_1,...,t_n\right)$$

פירושי היחסים שרירותיים.

תרגיל: הוכיחו\הפריכו שמבנים הבאים הם מבני הרברנד (המילון יהיה ברור מההקשר)

1. $\langle \mathbb{N}, 0, succ \rangle$ -

כן: למשל $2 = [|succ\,(succ\,(0))|]_{\rho}$

2. $\langle \mathbb{Z}, 0, succ, pred \rangle$

לא: אין יחידות $[|0|]_{\rho} = [|pred\,(succ\,(0))|]_{\rho}$

3. $\left\langle [0,1), \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, ..., + \mod 1 \right\rangle$

לא: משיקולי עוצמה

4. $\left\langle \{a,b\}^*, \varepsilon, a^1, b^1 \right\rangle$

כן : למשל $abb = [|a\,(b\,(b\,(\varepsilon)))|]_{\rho}$

שאלה: האם אתם מסוגלים לבנות מילון ומבנה הרברנד עבורו כך שתחום המבנה הוא כל העצים הבינארים?

הגדרה 0.5 אם $\varphi = \varphi'^{\forall}$ כאשר φ' חסרת כמתים (כלומר φ פסוק אוניברסלי)
נסמן $GrIns\,(\varphi)$ את קבוצת כל הפסוקים המתקבלים מ־φ' על ידי הצבות.
עבור תורה אוניברסלית Γ נסמן:

$$GrIns\,(\Gamma) = \cup_{\varphi \in \Gamma} GrIns\,(\varphi')$$

משפט 0.6 במילון עם סימן קבוע (וללא שיוויון) תורה אוניברסלית Γמקיימת
Γ ספיקה אמ"מ $GrIns\,(\Gamma)$ ספיקה.

תרגיל (שלא נסיים): הראו כי

$$\varphi_1, \varphi_3 \vDash \varphi_4$$

$$\varphi_1 = \forall x\,(s\,(x) \to \forall y\,(p\,(y) \to A\,(x,y)) \leftrightarrow E\,(x))$$

$$\varphi_3 = \exists y\,(p\,(y) \wedge \forall x\,(s\,(x) \to \neg a\,(x,y)))$$

$$\varphi_4 = \neg \exists x\,(s\,(x) \wedge \exists\,(x))$$

$\varphi_1, \varphi_3 \vDash \varphi_4 \iff \Gamma = \{\varphi_1, \varphi_3, \neg\varphi_4\}$ אינה ספיקה
$\iff GrIns\,(sk\,(\Gamma))$ אינה ספיקה
וכעת נשתמש בקומפקטיות של תורת הפסוקים...