

# תרגול 8

17 במאי 2017

**הגדרה 0.1** נוסחאות הן שקולות ( $A \equiv B$ ) אם בכל מבנה  $M$  ובכל השמה  $\rho$  ערכן זהה

$$[[A]]_{\rho}^M = [[B]]_{\rho}^M$$

**תרגיל:** הראו כי

$$\forall x \varphi \{x/z\} \equiv \forall y \varphi \{y/z\}$$

כאשר  $x, y$  אינם חופשיים ב  $\varphi$

**פתרון:** יהיו מבנה  $M$  וסביבה  $\rho$  במבנה.

ממשפט הקשר בין הצבות לעדכוני סביבות וממשפט באי תלות במשתנים שאינם חופשיים, לכל  $w$  שאינו חופשי ב  $\varphi$  ולכל  $A \in D^M$

$$[[\varphi \{w/z\}]]_{\rho\{a/w\}} = [[\varphi]]_{\rho\{a/w\}\{[[w]]_{\rho\{a/w\}}/z\}} = [[\varphi]]_{\rho\{a/w\}\{a/z\}}$$

$$= [[\varphi]]_{\rho\{a/z\}}$$

ובפרט

$$[[\varphi \{x/z\}]]_{\rho\{a/x\}} = [[\varphi \{y/z\}]]_{\rho\{a/y\}}$$

לכל  $a \in D^M$

$$[[\forall x \varphi \{x/z\}]]_{\rho} = \begin{cases} t & [[\varphi \{x/z\}]]_{\rho\{a/x\}} = t \\ f & \text{else} \end{cases} = \begin{cases} t & [[\varphi \{y/z\}]]_{\rho\{a/y\}} = t \\ f & \text{else} \end{cases} = [[\forall y \varphi \{y/z\}]]_{\rho}$$

**הגדרה 0.2** תהיינה קבוצת נוסחאות (תורה)  $T$  ונוסחה  $A$

• נאמר כי  $T \models_v A$  אם בכל מבנה שבו  $T$  נכונה גם  $A$  נכונה.

• נאמר  $T \models_t A$  אם בכל מבנה לכל סביבה המספקת את  $T$ ,  $\rho$  מספקת גם את  $A$

**הערה 0.3** אם השגנו  $A \not\models_v T$  אז יש מבנה  $M$  בו  $T$  נכונה אך  $A$  לא, כלומר יש סביבה שלא מספקת את  $A$ .

סביבה זו מספקת את  $T$  ולכן  $T \models_t A$ , מכאן שמתקיים  $\models_t \subseteq \models_v$

מצד שני אם  $T \models_t A$  כאשר  $T$  מכילה רק פסוקים.

אז יש מבנה  $M$  וסביבה במבנה המספקת את  $T$  (ולכן  $T$  נכונה), אך לא מספקת את  $A$  (ולכן  $A$  לא נכונה), ולכן  $A \not\models_v T$ .  
לכן כל דוגמא נגדית לכך שיחסי הנביעה זהים צריכה שיהיה בה  $T$  עם נוסחה שאינה פסוק למשל:

$$p(x) \models \forall x p(x)$$

**תרגיל:** הראו שמשפט הדדוקציה לא חל עבור  $\neg$  ונביעה, כלומר לכל תורה T ולכל נוסחאות A, B

$$T, A \models_v B \iff T \models_v A \rightarrow B$$

**שגוי!**

**פתרון:** ניקח T ריקה,  $A = p(x)$  ו  $B = \forall xp(x)$  ראינו כי  $p(x) \models_v \forall xp(x)$  ונראה כעת כי

$$\not\models_v p(x) \rightarrow \forall xp(x)$$

כלומר צריך למצוא מבנה M שבו יש השמה  $\rho$  כך ש

$$\llbracket p(x) \rightarrow \forall xp(x) \rrbracket_\rho = f$$

ניתן למשל לקחת M בו  $D^M = \{0, 1\}$  ו  $p^M = \{1\}$   $p^M(0) = f, 1 \in p^M$  קבוע  $\rho$   $p^M(1) = t, 1 \in p^M$

$$\llbracket p(x) \rightarrow \forall xp(x) \rrbracket_\rho = h_{\rightarrow} (p^M(p(x)), \llbracket \forall xp(x) \rrbracket_\rho) = h_{\rightarrow} (t, f) = f$$

**תרגיל:**  $T \models_t A$  אמ"מ  $T \{d/x\} \models_t A \{d/x\}$  כאשר  $T \cup \{A\}$  קבוצת נוסחאות בהם לא מופיע הקבוע d.

**פתרון:** נראה כל כיוון בנפרד. נשתמש הרבה ב: לכל נוסחה B וסביבה  $\rho$  במבנה מסויים.

**הקשר:**

$$\llbracket B \{d/x\} \rrbracket_\rho = \llbracket B \rrbracket_{\rho\{\llbracket d \rrbracket_\rho/x\}}$$

נניח  $T \models_t A$  יהיו מבנה M וסביבה  $\rho$  המספקת את  $T \{d/x\}$

צ"ל ש  $\rho$  מספקת את  $A \{d/x\}$

נפעיל את הקשר על כל נוסחה ב  $T \{d/x\}$  ונקבל ש  $T$  מסתפקת על ידי  $\rho\{\llbracket d \rrbracket_\rho/x\}$

ולכן מהנתון גם A מסתפקת בסביבה זו.

נשתמש שוב בקשר ונקבל ש  $A \{d/x\}$  מסתפקת ב  $\rho$  כרצוי.

כיוון שני:

נניח  $T \{d/x\} \models_t A \{d/x\}$ . יהיו מבנה M וסביבה  $\rho$  המספקת את T צ"ל שמספקת גם את A.

כעת נגדיר מבנה N שזהה למבנה M פרט ל  $d^N = p(x)$  הסביבה  $\rho$  גם סביבה של N.

נשים לב שלכל נוסחה  $B \in T \cup \{A\}$  מתקיים

$$\llbracket B \rrbracket_\rho^M = \llbracket B \rrbracket_\rho^N$$

לכן אנו יודעים ש  $\rho$  מספקת את T במבנה N, וגם מספיק להראות ש  $\llbracket A \rrbracket_\rho^M = \llbracket A \rrbracket_\rho^N = t$

מהפעלת הקשר על כל  $B \in T \cup \{A\}$  נקבל

$$\llbracket B \{d/x\} \rrbracket_\rho^N = \llbracket B \rrbracket_{\rho\{\llbracket d \rrbracket_\rho/x\}}^N = \llbracket B \rrbracket_{\rho\{p(x)/x\}}^N = \llbracket B \rrbracket_\rho^N$$

מהנתון, עבור  $B=A$  נקבל  $\llbracket A \rrbracket_\rho^N = t$  וסיימנו.

**מסקנה 0.4** ניתן לעבור מנוסחאות לפסוקים על ידי שימוש בתרגיל זה עבור כל משתנה שמופיע חופשי  $T \cup \{A\}$  ובכך לעבור ל  $\neg$  ונביעה.