תרגול 7

10 במאי 2017

מושגים במשתנים:

הגדרה 0.1 מופע של משתנה בנוסחה D מוגדר להיות חופשי\קושר מופעים\קשור למופע באופן הבא:

1. אם D אטומי, כל המופעים חופשיים
2. אם $D = A \wedge B$ אז המופעים כפי שהם בA וB
3. אם $D = \forall x A$ אזי המופע x החדש קושר את כל המופעים החופשיים בA

הגדרה 0.2 הנוסחה $D\{t/x\}$ מוגדרת כך:

- אם D אטומי, מחליפים כל x בT
- אם $D = \neg A$ אז $D\{t/x\} = \neg A\{t/x\}$
- אם $D = \exists y A$ אז:
  - אם Y=X אז $D\{t/x\} = D$
  - אחרת אם Y לא נמצא בT, אז $D\{t/x\} = \exists y A\{t/x\}$
  - אחרת $D\{t/x\} = \exists z (A\{z/y\})\{t/x\}$, Z חדש

משמעות:

הגדרה 0.3 מבנה $M = \langle D, I\rangle$ כאשר D נקרא תחום והוא קבוצה לא ריקה

פירוש לסימונים: פונקציה מהמילון

1. לקבוע C: $I(c) \in D$
2. לפונקציה N ־ מקומית F: $I(f) : D^n \to D$
3. ליחס N ־ מקומי R: $I(R) \subseteq D^n$

השמה **במבנה** היא פונקציה מקבוצת המשתנים לD

ערך של שם עצם בρ:

$$[|x|]_\rho = \rho(x)$$

$$[|c|]_\rho = I(c)$$

$$[|f(t_1, ..., t_n)|]_\rho = I(f)(t_1, ..., t_n)$$

ערך של נוסחה ב־ρ:

$$[|R(t_1, ..., t_n)|]_\rho = t \iff \left\langle [|t_1|]_\rho, ..., [|t_n|]_\rho \right\rangle \in I(R)$$

$$[|A \wedge B|]_\rho = h_\wedge \left([|A|]_\rho , [|B|]_\rho \right)$$

$$[|\forall y A|]_\rho = t \iff \forall a \in D. \, [|A|]_{\rho\{a/y\}} = t$$

משפט 0.4 לכל זוג p_1, p_2 , אם $p_1|_\Delta = p_2|\Delta$ לקבוצת המשתנים Δ אז:

$$[|\varphi|]_{\rho_1} = [|\varphi|]_{\rho_2}$$

$$[|t|]_{\rho_1} = [|t|]_{\rho_2}$$

אם אין משתנים חופשיים מחוץ לA בφ, t
* ללא הוכחה

.

משפט 0.5 לכל זוג p_1, p_2 , אם $p_1|_\Delta = p_2|\Delta$ לקבוצת המשתנים Δ אז:

$$[|s\,\{t/x\}|]_\rho = [|s|]_{\rho\left\{[|t|]_\rho/x\right\}}$$

$$[|\varphi\,\{t/x\}|]_\rho = [|\varphi|]_{\rho\left\{[|t|]_\rho/x\right\}}$$

* ללא הוכחה

הגדרה 0.6 נאמר שנוסחה ספיקה במבנה מסויים אם קיימת סביבה המספקת אותה.

.

הגדרה 0.7 נאמר שנוסחה נכונה במבנה מסויים אם כל סביבה מספקת אותה.

.

הגדרה 0.8 נאמר שנוסחה ספיקה אם היא ספיקה במבנה כלשהו

.

הגדרה 0.9 נאמר שנוסחה תקפה אם היא נכונה בכל מבנה

תרגיל: לכל נוסחה φ , הראו כי :

- $(\exists\delta\forall\varepsilon\varphi) \to (\forall\varepsilon\exists\delta\varphi)$ **תקפה**
- $(\forall\varepsilon\exists\delta\varphi) \to (\exists\delta\forall\varepsilon)$ **ספיקה**

פתרון: תהי נוסחה φ מעל מילון כלשהו.
יהי מבנה M והשמה ρ במבנה.
עבור הראשונה:

$$[|(\exists\delta\forall\varepsilon\varphi) \to (\forall\varepsilon\exists\delta\varphi)|]_\rho$$

$$= h_\to \left([|(\exists\delta\forall\varepsilon\varphi)|]_\rho , [|(\forall\varepsilon\exists\delta\varphi)|]_\rho \right)$$

אם $[|(\exists\delta\forall\varepsilon\varphi)|]_\rho = f$ אז סיימנו.
אחרת, לפי ההגדרה יש $a\in D$ כך ש $[|\forall\varepsilon\varphi|]_{\rho\{a/\delta\}} = t$ כלומר,
יש $a\in D$ כך שלכל $b\in D$

$$[|\varphi|]_{\rho\{a/\delta\}\{b/\varepsilon\}} = t$$

בפרט לכל $b\in D$ יש $a\in D$ (אותו אחד ממקודם) כך ש

$$[|\varphi|]_{\rho\{b/\varepsilon\}\{a/\delta\}} = t$$

ולכן לכל $b\in D$

$$[|\exists\delta\varphi|]_{\rho\{b/\varepsilon\}}$$

ולכן

$$[|(\forall\varepsilon\exists\delta\varphi)|]_\rho = t$$

סה"כ, כך או כך הערך הוא T ולכן הנוסחא אכן תקפה. (כי ρ וM שבחרנו שרירותיים)
עבור הסעיף השני, קל לבדוק שהנוסחה נכונה במבנה עם איבר בודד.

תרגיל: הראו כי

$$\forall x\ \varphi\{x/z\} \equiv \forall y\ \varphi\{y/z\}$$

לכל נוסחה φ בה x,y אינם חופשיים.

פתרון: לכל $a\in D$ ולכל w שאיינו חופשי ב־φ:

$$[|\varphi\{w/z\}|]_{\rho\{a/w\}} = [|\varphi|]_{\rho\{a/w\}}\left\{[|w|]_{\rho\{a/w\}/z}\right\} = [|\varphi|]_{\rho\{a/z\}}$$

ומכאן ניתן להסיק

$$[|\forall x\varphi\{x/z\}|]_\rho = [|\forall y\varphi\{t/z\}|]_\rho$$