תרגול 6

4 במאי 2017

הגדרה 0.1 שלמות ונאותות
נאותות: $\vdash \subseteq \vDash$
שלמות: $\vDash \subseteq \vdash$

משפט 0.2 מערכת הוכחה HPC נאותה ושלמה (ביחס לסמנטיקה קלאסית)

מסקנה 0.3 $\vDash$ קומפקטי

תרגיל: הוכח כי שתי ההגדרות לקומפקטיות $\vDash$ שקולות"
1. לכל תורה T ופסוק A: $T \vDash A \iff$ יש תת קבוצה סופית $T' \subseteq T$ כך שמתקיים $T' \vDash A$
2. לכל תורה T: T ספיקה $\iff$ כל תת־קבוצה סופית $T' \subseteq T$ספיקה.

פתרון: $2 \Rightarrow 1$:
ננסח את 1 מחדש "לכל תורה T ופסוק A $T \nvDash A \iff T' \nvDash A$ לכל $T' \subseteq T$ סופית"
תהי תורה T, נשים לב כי עבור $A = p_1 \wedge \neg p_1$ מתקיים $\Delta \nvDash A \iff \Delta$ ספיקה.
נציב את T וA בנוסח החדש של 1 ונקבל את 2 עבור T זו. T שרירותית ולכן סיימנו.
$1 \Rightarrow 2$:
....
■

תרגיל: נאמר כי תורה היא דו־ספיקה אם היא מסתפקת על ידי השמה ρ עבורה $\forall k\ .\rho\left(p_{2k}\right) = f$
הראו שקומפקטיות (2) מתקיימת עבור דו־ספיקות.

רעיון: נשתמש במשפט הקומפקטיות על ידי כך שנתרגם דו ־ספיקות לספיקות על ידי הקבוצה $\neg p_{2k} = \{\neg p_2, \neg p_4, ...\}$
"לכל תורה T, T דו ספיקה $\iff T \cup \neg p_{2k}$ ספיקה.

פתרון: כיוון אחד ברור, נראה את השני.
תהי תורה T עבורה כל $T' \subseteq T$ סופית היא דו ־ ספיקה.
תהי $T' \subseteq T \cup \neg p_{2k}$ סופית, אז $T' \backslash \neg p_{2k} \subseteq T$ סופית.
לכן היא דו ספיקה ולכן $T' \subseteq T' \backslash \neg p_{2k} \cup \neg p_{2k}$ ספיקה.
אז כל תת־קבוצה סופית של $T \cup \neg p_{2k}$ ספיקה ולכן מקומפקטיות היא ספיקה, לכן T דו־ספיקה.

תרגיל: כל סדר חלקי ניתן למלא.
$(s, \prec)$ סדורה חלקית אם

$$\forall a \in S\ a \prec a$$

$$\forall a,b \in S\ a \prec b \wedge b \prec a \rightarrow a = b$$

$$\forall a, b, c\ a \prec b \wedge b \prec c \rightarrow a \prec c$$

(סדורה מלא: אומר גם $\forall a, b \in S\ a \prec b \vee b \prec a$)

פתרון: נתאם לכל יחס בינארי $(\mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N})$ השמה:

$$\rho(p_{a,b}) = \begin{cases} t & a * b \\ f & else \end{cases}$$

קידוד: נבנה קבוצה כך שתיהיה ספיקה אמ"מ ניתן למלא את הסדר החלקי $(S, \prec)$ איחוד של הבאים:

$$\tilde{C} = \{P_{a,b} | a \prec b\}$$

כל השמה שתספק את $\tilde{C}$ מתאימה ליחס המכיל את $<$)

$$\tilde{R} = \{P_{a,b} | a = b\}$$

$$\tilde{A} = \{\neg P_{a,b} \vee \neg P_{b,a} | a \neq b\}$$

$$\tilde{T} = \{P_{a,b} \wedge P_{b,c} \to P_{a,c} | a, b, c\}$$

$$\tilde{F} = \{P_{a,b} \vee P_{b,a} | a, b\}$$

כולמר עלינו להראות

$$\tilde{S} = \tilde{C} \cup \tilde{R} \cup \tilde{A} \cup \tilde{T} \cup \tilde{F}$$

ספיקה.
תהי תת קבוצה סופית $\tilde{S}' \subseteq \tilde{S}$
ב$\tilde{S}'$ מופיעים רק כמות סופית של אינדקסים, נסמן $S' \subseteq S$. אז $(s', \prec')$ סדר חלקי.
סדר חלקי סופי קל למלא (תרגיל לקורא לחשוב על האלגוריתם), ולכן $\tilde{S}'$ ספיקה.
מקומפקטיות $\tilde{S}$ ספיקה.

השפה הפורמלית: תחילה בוחרים מילון:
1 סימני קבועים
2 סימני פונקצייה
3 סימני יחס
כאשר סימני פונקציה ויחס מגיעים עם מספר המתאר את כמות הכניסות
השפה:
1 (אינסוף) משתנים
2 קשרים לוגיים
3 כמתים $\exists\forall$
4 סימני עזר (),
5 הסימנים מהמילון

הצרנות: 1) "יש כלב חכם"
ניקח מילון עם יחסים חד־מקומיים $smart, dog$

$$\exists x\left(dog\left(x\right)\wedge smart\left(x\right)\right)$$

2) "כל חתול חכם"

$$\forall x\left(cat\left(x\right)\rightarrow smart\left(x\right)\right)$$

4) (כן 4 זה לא טעות) "יש למלכה בדיוק שני יורשים"
ההצרנה היא $\varphi\wedge\psi$

$$\varphi=\exists x\exists y\left(heir\left(q,x\right)\wedge heir\left(q,y\right)\wedge x\neq y\right)$$

$$\psi=\forall x\forall y\forall z\left(heir\left(q,x\right)\wedge heir\left(q,y\right)\wedge heir\left(q,z\right)\rightarrow x=y\vee y=z\vee z=x\right)$$

מתקיים

$$F:D^{n}\rightarrow D$$

$$R:D^{n}\rightarrow\left\{ t,f\right\}$$

נוסחאות חוקיות:
שמות עצם מוגדרים אינדוקטיבית
בסיס: כל משתנה וכל קבוע
צעד: $f\left(t_{1},...,t_{n}\right)$ כאשר F פונקציה N מקומית, $t_{1},...,t_{n}$ שמות עצם.
כל שם עצם מתקבל כך.
נוסחאות חוקיות מוגדרות אינדוקטיבית
בסיס:
$R\left(t_{1},...,t_{n}\right)$ כאשר R סימן יחס N מקומי $t_{1},...,t_{n}$ ש"ע.
צעד:
אם A,B נוסחאות אז $\left(\neg A\right)$, $\left(A\circ B\right)$,$\left(QxA\right)$

$$\circ\in\left\{ \vee,\wedge,\rightarrow,\leftrightarrow\right\} \;Q\in\left\{ \exists,\forall\right\}$$

x משתנה. כל נוסחה מתקבלת כך.
גם כאן יש לנו משפט קריאה יחידה (הפעם גם לש"ע) ולכן ניתן להגדיר פונ' באופן אינדוקטיבי.