

תרגול 5

26 באפריל 2017

ב HPC לכל פסוקים A,B,C

1

$$Ax.1 \frac{}{A \rightarrow (B \rightarrow A)}$$

2

$$Ax.2 \frac{}{(A \rightarrow B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow B) \rightarrow A \rightarrow C}$$

3

$$Ax.3 \frac{}{(\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow (\neg A \rightarrow B) \rightarrow A}$$

4

$$MP \frac{A \quad A \rightarrow B}{B}$$

למה 0.1 לכל פסוק A מתקיים $\vdash_{HPC} A \rightarrow A$

משפט 0.2 לכל תורה T (קבוצה של פסוקים) ופסוקים A,B
אם מתקיים $T, A \vdash B$ אז $T \vdash A \rightarrow B$

תרגיל: לכל פסוקים A,B,C

$$A \rightarrow B, B \rightarrow C \vdash A \rightarrow C$$

תרגיל: לכל פסוקים A,B,C

$$A \rightarrow (B \rightarrow C) \vdash B \rightarrow (A \rightarrow C)$$

פתרון: די להראות שמתקיים $A \rightarrow B \rightarrow C, B, A \vdash C$
משום שאז נפעיל את משפט הדדוקציה פעמיים
אכן: (סדרת הוכחה)

1. asp A

2. asp B

3. asp $A \rightarrow B \rightarrow C$

4.MP(1)(3) $B \rightarrow C$

5.MP(2)(4) C

תרגיל: הוכיחו כי לכל פסוקים A, B
 $\vdash \neg\neg B \rightarrow B$ (א)
 $\vdash (\neg B \rightarrow \neg A) \rightarrow (A \rightarrow B)$ (ב)

פתרון:

1.Lem id $\neg B \rightarrow \neg B$

2.Ax.3 $(\neg B \rightarrow \neg\neg B) \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg B) \rightarrow B$

⋮

3.Lem flip(2) $(\neg B \rightarrow \neg B) \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg\neg B) \rightarrow B$

4.MP(1)(3) $(\neg B \rightarrow \neg\neg B) \rightarrow B$

5.Ax.1 $\neg\neg B \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg\neg B)$

6.Lem Comp(5)(4) $\neg\neg B \rightarrow B$

תרגיל: הראו כי הנוסחים הבאים לעיקביות של תורה שקולים (HPC)

- קיים פסוק B כך ש $T(\mathcal{K}) B$
- לכל פסוק A מתקיים $T(\mathcal{K}) A$ או $T(\mathcal{K}) \neg A$

Explosion : $\vdash A \rightarrow (A \rightarrow B)$
 נראה סדרת הוכחה.

$$\text{Lem}(exp) \vdash A \rightarrow A \rightarrow B$$

⋮

$$T \vdash A \rightarrow A$$

⋮

$$T \vdash A \vdash A$$

$$MPx2 \vdash B$$

ולכן $T \vdash B$

הערה 0.3 נאותות ושלמות

נאותות: $T \vdash A \Rightarrow T \models A$

שלמות: $T \vdash A \Leftarrow T \models A$

תרגיל: נוסף קשר חד מקומי \boxtimes

לשפת הפסוקים. ונוסף ל HPC את האקסיומה $\boxtimes(A \rightarrow B) \rightarrow (\boxtimes A \rightarrow \boxtimes B)$ ומצאו פונקציית את h_{\boxtimes} כך שהמערכת נאותה וגם לא שלמה.

פתרון: תחילה נשים לב כי אם ניקח את הפונקציה הקבוע $h_{\boxtimes} = f$, אז האקסיומה היא טאוטולוגיה. עבור ρ שרירותי

$$[[\boxtimes(A \rightarrow B) \rightarrow (\boxtimes A \rightarrow \boxtimes B)]]_{\rho}$$

$$h_{\rightarrow} \left([[\boxtimes(A \rightarrow B)]]_{\rho}, [[(\boxtimes A \rightarrow \boxtimes B)]]_{\rho} \right)$$

$$h_{\rightarrow} \left(h_{\boxtimes} \left([[(A \rightarrow B)]]_{\rho} \right), [[(\boxtimes A \rightarrow \boxtimes B)]]_{\rho} \right)$$

$$h_{\rightarrow} \left(f, [[(\boxtimes A \rightarrow \boxtimes B)]]_{\rho} \right) = t$$

ולכן על ידי חזרה על הוכחת הנאותות של HPC בצירוף אקסיומה זו, נקבל שהמערכת נאותה.

ולכן בפרט $H \boxtimes p_1$, כי $\boxtimes p_1 \neq H$ והמערכת נאותה.

כעת ניקח את הפונקציה הקבועה $h_{\boxtimes} = t$. שוב האקסיומה היא טאוטולוגיה ולכן שוב המערכת נאותה מצד שני, המערכת אינה שלמה כי $\boxtimes p_1 \neq H$

$\models \boxtimes p_1$