תרגול 4 לוגיקה

26 באפריל 2017

שלמות פונקציונלית: כל נוסחא φ משרה באופן טבעי פונקצייה מסביבה לערכי אמת $g_{\varphi}\left(\rho\right)=\left[|\varphi|\right]_{\rho}$
ההיפך לא נכון: לא כל פונקציה כזו מושרת על ידי נוסחא.

הגדרה 0.1 קבוצה של משתנים Δ היא תומך לפונקציה G אם:

$$\rho_{1}|_{\Delta}=\rho_{2}|\Delta\Rightarrow g\left(\rho_{1}\right)=g\left(\rho_{2}\right)$$

טענה 0.2 קבוצת המשתנים המופיעה בנוסחא היא תומך לפונקציה המושרת ממנה. בפרט התומך סופי.

הגדרה 0.3 קבוצת קשרים נקראת שלמה פונ' אם כל פונקציה עם תומך סופי מושרת מנוסחא מעל קשרים אלו.

תרגיל: הוכיחו כי $\{\uparrow\}$ שלמה פונקציונלית $(NAND)$

פתרון: נראה שניתן להגדיר את $\{\neg,\wedge\}$ באמצעות $\{\uparrow\}$:

$$\neg A=A\uparrow A,\ A\wedge B=\left(\neg A\right)\uparrow\left(\neg B\right)$$

תהי G עם תומך סופי. אז מאחר ו $\{\neg,\wedge\}$ שלמה פונקציונלית, יש נוסחא φ מעל הקשרים האלו שמשרה את G.
ממה שראינו יש נוסחא $\varphi'\equiv\varphi$ כאשר φ' מעל $\{\uparrow\}$.
ולכן φ' משרה את G.

תרגיל: הפריכו כי $\{\wedge,\leftrightarrow\}$ שלמה פונקציונלית.

פתרון: נראה שכל נוסחא C מעל קשרים אלו מסתפקת בסביבה הקבוע $\rho\left(p\right)=t$ (באינדוקציה מבנית)
בסיס: ...
צעד: אם $C=A\leftrightarrow B$ כאשר A,B נוסחאות המקיימות את הטענה.

$$\left[|C|\right]_{\rho}=h_{\leftrightarrow}\left(\left[|A|\right]_{\rho},\left[|B|\right]_{\rho}\right)=h_{\leftrightarrow}\left(t,t\right)=t$$

בדומה לקשר 1. בפרט, לפונקציה הקבועה $g\left(\rho\right)=f$ (עם תומך ϕ), אין נוסחא המשרה אותה.

צורות נורמליות: (CNF,DNF)

- ליטרל הינו משתנה או שלילה של משתנה $(p,\neg q)$
- קוניוקציה של נוסחאות $\{A_1,...,A_n\}$ זו הנוסחה $A_1\wedge...\wedge A_n$
- דיסונקציה של נוסחאות $\{A_1,...,A_n\}$ זו הנוסחא $A_1\vee...\vee A_n$
- נוסחא בצורה של CNF זו קוניוקציה של דיסונקציות של ליטרלים
- נוסחא בצורה של DNF זו דיסונקציה של קוניוקציות של ליטרלים

למשל, $p\vee\left(r\wedge\neg q\right)$ בצורת DNF
$\left(\neg p\right)\wedge q$ גם DNF מסיבה אחת וגם CNF מסיבה אחרת.

תרגיל: מצאו פסוק CNF ופסוק DNF השקולים ל$p\rightarrow r\wedge\neg q$

פתרון: דרך שקילויות בסיסיות נעביר את הנוסחא לצורת נורמליות

$$p\to r\wedge\neg q\equiv\neg p\vee(r\wedge\neg q)\,(CNF)\equiv(\neg p\vee r)\wedge(\neg p\vee\neg q)\,(DNF)$$

מערכת הוכחה בסגנון הילברט: הרעיון בהוכחה של טענה במערכת כזו היא להתחיל מקבוצת הנחות מוסכמות ולאגור טענות נכונות עד להגעה לטענה הרצויה.

הגדרה 0.4 תהי קבוצה של תווים $\mathcal{L}$
תהי קבוצה מחרוזות F מעל $\mathcal{L}$
תהי קבוצה של יחסים מעל לנוסחאות $n>0$ מקומיים $\mathcal{C}$
הוכחה של פסוק φ מתוך הנחות Γ זו סדר סופית $\varphi_1,...,\varphi_n$ כך ש$\varphi_n=\varphi$ ולכל $i\in[n]$ מתקיים ש$\varphi_i\in\Gamma$ או שקיים כלל $R\in\mathcal{C}$
ואינדקסים $i_j<i$ לכל $i_j\in[m]$ עבורם $\langle\varphi_{i_1},...,\varphi_{i_m}\rangle\in R$ נסמן קיום הוכחה כזאת $\Gamma\vdash\varphi$

דוגמא: תהי מערכת הוכחה מעל הא"ב $\{C,S,D,H\}$בה קבוצת הפסוקים היא קבוצת כל המחרוזות שאין בהם 3 פעמים ברצף את אותו תו ועם הכללים הבאים.

$$\frac{}{S}\text{'}\ \frac{S_1\ S_2}{reduce\,(S_1S_2)}$$

כאשר S נוסחא מאורך 3 וS_1S_2 נוסחאות ו$reduce$ תוגדר על ידי האלגוריתם הבא.

- אם אין רצף מאורך 3 - החזר את המחרוזות
- אחרת, מצא את הרצף המוקדם ביותר
- אם התו הוא H או D מחק את הרצף מאורך 3
- אם התו הוא S או C מחק אות אחת מהרצף
- פעל שוב על התוצאה

הסדרה הסופית SSD,CCH,DDS,SS זו הוכחה של ss מתוך ההנחות $\vdash ss$
הסדרה הסופית DD,DS,S היא הוכחה של S מתוך $\{DD,DS\}$ $DD,DS\vdash S$

תרגיל: בדוגמא לעיל נניח שפסוק הוא נכון אם אינו מאורך 1, הראו שהמערכת נאותה במובן החלש, כל פסוק הניתן להוכחה ללא הנחות הוא נכון.
לא סיימנו...