לוגיקה תרגול 2

22 במרץ 2017

תחביר:

הגדרה 0.1 נוסחאות מוגדרות באופן אינדוקטיבי
1) **בסיס:** p_i נוסחא לכל משתנה p_i
2) **צעד:** אם A,B נוסחאות
$(\neg A)$ נוסחא
$(A \circ B)$ נוסחא עבור $\circ \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \iff\}$
3) כל נוסחא מתקבלת באופן שלעיל

טענה 0.2 מחרוזת היא נוסחא חוקית אם ורק אם יש עץ בנייה אם ורק אם יש לה סדרת בנייה

דוגמא:
$(\neg (p_1 \rightarrow (p_2 \wedge p_3)))$
סדרת בנייה:

$$p_2, p_3, (p_2 \wedge p_3), p_1, (p_1 \rightarrow (p_2 \wedge p_3)), (\neg (p_1 \rightarrow (p_2 \wedge p_3)))$$

עקרון:
כדי להוכיח טענה באינדוקציה לפעמים צריך להחליפה בטענה חזקה יותר.

טענה 0.3 לכל $n \in \mathbb{N}$ סכום N האי־זוגיים הראשונים הוא ריבוע של מספר טבעי.

$$\forall n \exists k \ \sum_{i=0}^{n-1} (2i+1) = k^2$$

באינדוקציה:
בסיס: סכום ריק ולכן שווה ל0 (0 בריבוע)
צעד: ? מתבלגן, נניח נכונות עבור N ונחשב

$$\sum_{i=0}^{n} (2i+1) = k^2 + 2n + 1....and$$

טענה 0.4 לכל $n \in \mathbb{N}$ סכום N האי־זוגיים הראשונים הוא n^2

הוכחה: בסיס: זהה
צעד: נניח נכונות עבור N ונחשב:

$$\sum_{i=0}^{n} (2i+1) = n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$$

■

חידה:
לכל $n \in \mathbb{N}$ ריבוע פיקסלים $2^n x 2^n$ ניתן לריצוף ע"י שלשות בצורה L כך שנותר פיקסל יחיד לא מרוצף צמוד למרכז.

טענה 0.5 כדי להראות שתכונה מתקיימת לכלל הנוסחאות,
יש להראות שהיא מתקיימת לכל משתנה (בסיס) ושאם היא מתקיימת עבור A,B אז גם עבור$(\neg A)$, $(A \circ B)$ $\circ \in$ $\{\wedge, \vee, \rightarrow, \iff\}$

טענה 0.6 בכל נוסחא ביו כל שני מופעים שונים של משתנים יש קשר

הוכחה: **בסיס:** אם הנוסחה היא משתנה, אז אין שני מופעים ולכן הטענה מתקיימת באופן ריק.
צעד: נניח A,B נוסחאות שמקיימות את הטענה. נראה שאם $\circ \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \iff\}$
אזי $A \circ B$ מקיימת את הטענה. יהיו שני מופעים של משתנים.
אם שניהם בA, יש בינהם קשר לפי הנחת האינדקוציה, בדומה עבור B.
אם אחד בA ואחד בB אז נמצא $\circ$בינהם.
המקרה של $\neg A$ טריוויאלי. ■

הערה 0.7 הרעיון למצוא תכונה שכל הנוסחאות מקיימות אך המחרוזת הנתונה לא.

הגדרה 0.8 מחרוזת s_1 נקראת רישא של s_2 אם יש מחרוזת s' כך ש$s_2 = s_1 s'$, היא רישא ממש אם $s' \neq \varepsilon$

הערה 0.9 אף נוסחא חוקית אינה רישא ממש של נוסחא חוקית אחרת (נוסע מאיזון סוגריים)

טענה 0.10 תהי נוסחא φ אז מתקיים בדיוק אחד מהבאים:
1. קיים משתנה p יחיד כך ש $\varphi = p$
2. קיימת נוסחא ψ יחידה עבורה $\varphi = \neg \psi$
3. קיימות נוסחאות ψ, τ יחידות וקשר דו מקומי יחיד $\circ$כך ש$\varphi = \psi \circ \tau$

הוכחה: קיום נובע מיידית מאינדוקציה על φ. עבור יחידות, נראה את המקרה הקשה ביותר:
יש α, β ויש γ, δ ויש $\circ$ קשר דו מקומי כך ש:$(\alpha \circ \beta) = \varphi = (\gamma \circ \delta)$
אם α וגם γ לפחות באורך i, לא ייתכן שיש מקום i כך שמתקיים $\alpha[i] \neq \gamma[i]$ כי אז $\varphi[1+i] \neq \varphi[1+i]$ (בגלל הסוגר)
לכן אחד מהם רישא של השני. אך שתיהן נוסחאות ולכן $\alpha = \gamma$, באותו אופן עושים עבור β, δ כאשר אם $\beta[i] \neq \delta[i]$
אז $\varphi[1+n+1+i] \neq \varphi[1+n+1+i]$ ולכן $\beta = \delta$ שאר המקרים פשוטים יותר. ■

כעת ניתן להגדיר פונקציות רקורסיביות על נוסחאות ללא חשש!

הערה 0.11 מעתה המתרגל לפעמים יחסוך בסוגריים (וגם אני לפעמים), על ידי הסכמה על סדר פעולות.
1. $\neg$
2. $\wedge, \vee$
3. $\rightarrow$
4. $\iff$

ואם יש שיוון בקדימות, מבצעים מימין לשמאל.
למשל $A \rightarrow B \rightarrow C = (A \rightarrow (B \rightarrow C))$
דגש: זו מוסכמה א־פורמלית, כלומר לא שינינו את השפה!

הגדרה 0.12 קבוצת תתי הנוסחאות של D תסומן $SF(D)$ ומוגדרת כך:
1. אם D משתנה אזי $SF(D) = \{D\}$
2. אם $D = \neg A$ אזי $SF(D) = \{D\} \cup \{SF(A)\}$
3. אם $D = A \circ B$ אזי $SF(D) = \{D\} \cup \{SF(A)\} \cup \{SF(B)\}$

טענה 0.13 תת נוסחא זו תכונה טרנזיטיבית, כלומר אם $\varphi \in SF(\psi)$ ו$\psi \in SF(\tau)$ אזי $\varphi \in SF(\tau)$

הוכחה: אינדוקציה מבנית על τ(אם $\tau = \psi$ אזי הטענה נכונה מיידית)
למשל, אם $\tau = \neg \alpha$ והטענה נכונה עבור α אז $\psi \in \{\tau\} \cup SF(\alpha)$
בה"כ $\psi \in SF(\alpha)$ ומהנחת האינדוקציה $\varphi \in SF(\alpha)$ לכן $\varphi \in SF(\tau)$... ■

הגדרה 0.14 כמות הקשרים במחרוזת A תסומן $C(A)$

טענה 0.15 כמות הקשרים מונו' עולה ממש ביחד לתת נוסחא, כלומר מתקיים אם φ תת נוסחא ממש של ψ
אזי $C(\varphi) < C(\psi)$

הוכחה: אינדוקציה על ψ ■