תרגול 12

21 ביוני 2017

אקסיומות:

$$\vdash A \to B \to A$$

$$\vdash (A \to B \to C) \to (A \to B) \to A \to C$$

$$\vdash (\neg A \to \neg B) \to (\neg A \to \neg B) \to A$$

$$A, A \to B \vdash B$$

$$\vdash \forall x A \to A\left\{\frac{t}{x}\right\}$$

t שם עצם

$$\vdash \forall x\,(A \to B) \to A \to \forall x B$$

x אינו חופשי בA

$$A \vdash \forall x A$$

משפט 0.1 נאותות $\Gamma \vDash_v A \Leftarrow \Gamma \vdash_{HC} A$

למה 0.2 אם $\Gamma' \vdash_{HC} A' \Leftarrow \Gamma \vdash_{HPC} A$ כל פסוק אטומי מולחף בנוסחה

משפט 0.3 דדוקציה - לכל תורה T, נוסחה B , פסוק A

$$T, A \vdash_{HC} B \iff T \vdash_{HC} A \to B$$

תרגיל:
לכל תורה Γ ונוסחה ϕ

$$\Gamma \vdash_{HC} \phi \Rightarrow \Gamma \vdash_{HC} \exists x \phi$$

$$(\text{"}\exists x\phi\text{"} = \neg\forall x \neg\phi)$$

פתרון:
נניח $\Gamma \vdash_{HC} \phi$
מספיק להראות $\vdash_{HC} \phi \to \exists x\phi$ (MP)
מאחר ו$\forall x\left(\neg\phi\right) \to \neg\phi$ זו אקסיומה, מספיק להראות $\vdash_{HC} \left(\forall x\left(\neg\phi\right) \to \neg\phi\right) \to \phi \to \exists x\phi$ (MP)
מספיק להראות (לפי למה) $\vdash_{HPC} \left(p_1 \to \neg p_2\right) \to p_2 \to \neg p_1$
כעת נותרנו עם תרגיל בתחשיב HPCדדקוציה פעמיים מספק

$$p_1 \to \neg p_2, p_2 \vdash_{HPC} \neg p_1$$

לפי דיכוטומיה (חלוקה למקרים) מספיק

$$p_1 \to \neg p_2, p_2, p_1 \vdash_{HPC} \neg p_1 ...$$

$$p_1 \to \neg p_2, p_2, \neg p_1 \vdash_{HPC} \neg p_1$$

תרגיל:
תהיינה C_1, C_0 קבוצות פסוקים מעל אותו מילון ללא מודל משותף.
הראו כי יש פסוק α כך שלכל מבנה M

$$M \vDash C_0 \Rightarrow M \vDash \alpha$$

$$M \vDash C_1 \Rightarrow M \vDash \neg\alpha$$

פתרון:
נתון $C_0 \cup C_1$ ללא מודל (לא ספיקה)
מקומפקטיות יש תת קבוצה סופית שלה שאינה ספיקה, כלומר יש $\Pi_i \subseteq C_i$ סופית כך ש $\Pi_0 \cup \Pi_1$ לא ספיקה.
כעת נגדיר $\varphi_i = \wedge_{\beta \in \Pi_i} \beta$ ונגדיר $\alpha = \varphi_0 \wedge \neg\varphi_1$
אם $M \vDash C_0$ אזי $M \vDash \Pi_0$ אז $M \vDash \varphi_0$
ולכן $M \nvDash \Pi_1$ אזי M $M \vDash \neg\varphi_1$ ולכן $M \vDash \alpha$ $\neg\alpha \equiv \neg\varphi_0 \vee \varphi_1$ וההמשך כמו מקודם.
תרגיל:
הראו כי הכלל

$$\frac{A \to B}{A \to \forall x B}$$

(כאשר x לא חופשי בA קביל בHC)
פתרון:
צ"ל שכל הוכחה שנעזרת בכלל הזה ניתן לתרגם להוכחה שאינה נעזרת בו.
נראה

$$A \to B \vdash_{HC} A \to \forall x B$$

כאשר $x \notin F_v\left(A\right)$
סדרת הוכחה:

$$A \to B$$

$$\forall x\left(A \to B\right)$$

$$\forall (A \to B) \to A \to \forall x B$$

$$A \to \forall x B$$

לכן בכל הוכחה ניתן להחליף שימוש בכלל זה הסדרה לעיל.
(יותר פורמלי להוכיח באינדוקציה על אורך ההוכחה)
תרגיל:
יהי מילון $\{+,\cdot,<,=\}$
ומבנה הממשיים מעל מילון המפרש את הסימנים באופן סטנדרטי
א) הראו כי כל הרציונליים גדירים
ב) הראו שיש הרחבה אלמנטרית M עם איבר אינפ':
יש $\varepsilon \in D^M$ כך ש$r <^M \varepsilon$ לכל $r \in D^M$ (רציונלי חיובי)
וגם $0 <^M \varepsilon$
פתרון:

$$(\forall y (x + y = y))$$

$$\varphi_0 = x + x = x$$

$$\varphi_1 = \forall y (x \cdot y = y)$$

לכל $n \in \mathbb{N}$

$$\varphi_{n+1} = \exists y \exists z \varphi_n (y) \wedge \varphi_1 (z) \wedge y + z = x$$

$$(\exists y (\varphi_1) \wedge x = y + ... + y)$$

$$\varphi_{-n} = \exists y \exists z \varphi_n (y) \wedge \varphi (z) \wedge x + y = z$$

לכל $m \in \mathbb{Z}$

$$\varphi_{\frac{m}{n}} = \exists y \exists z \varphi_n (y) \wedge \varphi_m (z) \wedge x \cdot y = z$$

ב)
דומה לתרגיל עם המודלים שלא סטנדרטיים של האריתמטיקה נוסיף קבוע ε חדש
לכל רציונלי חיובי r $r > 0$

$$\omega_r = \exists y (\varphi_r (y) \wedge \varepsilon < y)$$

$$\omega_0 = \exists y \varphi_o (y) \wedge 0 < \varepsilon$$

Γ כל הפסוקים הנכונים בR
אז כל תת קבוצה סופית של

$$\Gamma \cup \{\omega_r\}_{r \in \mathbb{Q}, r > 0}$$

מסתפק במבנה שמרחיב את R לפרש את ε כרציונלי מספיק קטן.
לכן לקבוצה כולה יש מודל .
נשכח במודל זה את הפירוש של ε וסיימנו
תרגיל ללא פתרון פורמלי:
הראו שהתכונה "בגרף פשוט יש מעגל מאורך זוגי" אינה גדירה
פתרון:
אם זה היה גדיר (למשל על ידי קבוצה Γ)
נוסיף לקבוצה את "אין מעגל מאורך $2m$ "
לכל m טבעי