תרגול 11

14 ביוני 2017

קומפקטיות:

משפט 0.1 קבוצת נוסחאות ספיקה אמ"מ כל תת קבוצה סופית שלה ספיקה

.

הגדרה 0.2 לוגיקה עם שיוון זה תחשיב פסוקים הרגיל, יחד עם הדרישה שבמילון יש סימן יחס דו־מקומי = וכל מבנה מפרש יחס זה כזהות

.

טענה 0.3 יש תרגום משמר ספיקות מלוגיקה עם שיוויון ללויגיקה ללא שיוויון

.

מסקנה 0.4 משפט הקומפקטיות חל גם בלוגיקה עם שיוויון

.

תרגיל:

תהי $K \subseteq \mathbb{N}$ כך ש$\sup L = \infty$

הוכיחו שאין קבוצת פסוקים בלוגיקה עם שיוון (מעל כל מילון), שנכונה מבנה אמ"מ גודל תחומו נמצא בL

פתרון:

נגדיר פסוקים

$$\omega_n := \exists x_1 ... \exists x_{n+1} \wedge_{i,j=1}^{n+1} x_i \neq x_j$$

נניח בשלילה שיש קבוצת פסוקים Γ עם התכונות הנדרשות.

תהי תת קבוצה סופית של $\Gamma \cup \{\omega_n\}_{n=0}^{\infty}$ היא תת קבוצה של $\Gamma \cup \{\omega_n\}_{n=0}^{m-1}$ עבור $m \in \mathbb{N}$ כלשהו.

קבוצה זאת מסתפקת ע"י מבנה עם תחום מגודל $m < k \in K$

ולכן מקומפקטיות גם $\Gamma \cup \{\omega_n\}_{n=0}^{\infty}$ ספיקה, בסתירה.

הגדרה 0.5 יהיו מבנים M וN מעל אותו מילון, M נקרא הרחבה אלמנטרית של N אם $D^N \subseteq D^M$ ו$M \equiv N$ (כלומר מספקים את אותם הפסוקים)

.

הערה 0.6 מספיק לבדוק כיוון אחד, למשל אם ידוע שלכל פסוק φ: $M \vDash \varphi \Rightarrow N \vDash \varphi$, אז אם $N \vDash \psi$ אז $n \nvDash \neg\psi$ ולכן $M \nvDash \neg\psi$ ולכן $M \vDash \varphi$

.

תרגיל:

יהי במילון $\{0, succ, <\}$ והמבנה $N = \langle \mathbb{N}, 0, succ, < \rangle$

הוכיחו כי יש הרחבה אלמטרית M כך שיש בתחומו איבר שגדול יותר מכל איבר המיוצג ע"י שם עצם סגור.

(כלומר יש $a \in D^M$ כך ש$t^M <^M a$ לכל שם עצם סגור t)

פתרון:

נגדיר Γ קבוצת הפסוקים הנכונים ב־N.

נרחיב את המילון בקבוע חדש ∞. נשים לב שΓ קבוצת פסוקים מעל המילון החדש.

נגדיר פסוקים

$$\omega_n := succ^n(0) < \infty$$

כל תת קבוצה סופית של $\Gamma \cup \{\omega_n\}_0^{\infty}$ היא תת קבוצה של $\Gamma \cup \{\omega_n\}_0^{m-1}$ עבור m כלשהו.
ניקח מבנה N' הזהה למבנה N עם התוספת $\infty^{N'} = m$

$$\left([|\omega_n|]_{\rho}^{N'} = n <^N m\right)$$

לכן $\{\omega_n\}_0^{m-1}$ מסתפקת על ידי N' וגם Γ מסתפקת על ידי N'
(כי המבנים זהים עבור פסוקים ללא ∞)
ממשפט הקומפקטיות גם $\Gamma \cup \{\omega_n\}_0^{\infty}$ ספיקה, נניח ע"י M'
נגדיר M להיות זהה ל־M' פרט לכך שאין בו פירוש ל־∞.
לכן Γ מסתפקת ע"י M וגם יש ב־M איבר כרצוי $\left(\infty^{M'}\right)$

מסקנה 0.7 אין קבוצת פסוקים Γ המייצגת את $\langle \mathbb{N}, 0, succ, < \rangle$
כלומר שכל מבנה שמספק את Γ איזומורפי למבנה הנ"ל
הפתרון עובד גם בלוגיקה עם שיוויון וגם במילונים יותר רחבים
(המודל הסטנדרטי של האריתמטיקה) $(\langle \mathbb{N}, 0, succ, <, +, \cdot \rangle)$

.

תרגיל:
נקרא להרחבה אלמנטרית של המודל הסטנדרתי של האריתמטיקה שאינו איזומורפית לו.
"מודל לא־סטנדרטי של האריתמטיקה"
(שימו לב שהוכחנו קיום אך ודאי לא יחידות)
נקרא לאיברים הלא טבעיים "אינסופיים"
(כלומר איברים שאינם פירוש של שם עצם סגור)
הראו כי לכל מודל לא סטנדרטי של האריתמטיקה M יש איבר אינסופי ראשוני,
כלומר יש $a \in D^M$ כך לשכל $b, c \in D^M$ עבורם $a = bc$ מתקיים $c = 1$ או $b = 1$.
פתרון:
תחילה נציין את המשפט "p ראשוני גדול מ־n"..........
(לא סיימנו את התרגיל בשיעור)