7/5/2017 **הרצאה #6**

תזכורת:

לוגיקה מסדר ראשון:

- תחביר
- Σ - מילון - אוסף של קבועים, סימני פונקציות + כמה ארגומנטים, סימני יחס + כמה ארגומנטים.
- שפה מעל מילון Σ
- אלפבית Σ:

1) משתנים
2) סימני עזר "(", ")", ",", "."
3) קשרים בוליאניים $\neg, \leftrightarrow, \rightarrow, \vee, \wedge$
4) כמתים $\exists, \forall$

- שמות עצם מעל Σ: נבנים מ- הקבועים והמשתנים בעזרת סימני פונקציה:

$$f(\ ,\ ),\quad f(c, f(x,c))$$

- נוסחאות מעל Σ: אטומיות: $R(t_1, t_2)$ – סימן יחס.

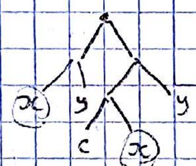
נוסחאות נבנות מנוסחאות אטומיות בעזרת קשרים בוליאניים וכמתים

- תפקיד של משתנים / מופעים:

binder   bound   free

מופע של x - חופשי / קשור או קושר

- שלד של נוסחה
- הצבות: בשם עצם $t\{\frac{t_1}{x}\}$. על גבי עץ הגזירה של t:



- הצבה בנוסחאות - כפי שראינו בשיעור שעבר.

במטא שפה - כללי חיסכון בסוגריים:

א) כמו בתחשיב הפסוקים + עבור כמתים:

ב) תחום של כמת הולך הכי רחוק ימינה:

$$\forall x. R(x,y) \wedge \forall z. R(z,x) \mapsto \forall x. \left(R(x,y) \wedge \forall z. R(z,x)\right)$$

$$\left(\forall x. A \wedge R(x,y)\right) \wedge \forall z. R(z,x) \mapsto \left(\forall x. (A \wedge R(x,y))\right) \wedge \forall z. R(z,x)$$

סימונים:

משתנים במטה שפה:

1) A, B, C, φ, ψ , φ_{13} - נוסחאות

2) שמות עצם - t, t_1, t''

3) משתנים: x'', x, y

4) עבור קבועים: a, b, c, d_{13}

5) עבור סימני פונקציה: f, g_3, h''

6) עבור סימני יחס: R, G, H

סמנטיקה: (משמעות)

מה הסרך של $\forall x. R(x,x)$? תלוי בפירוש של R ובתחום

$$\boxed{M = (D^M, C^M, f^M, R^M)}$$

תחום	פירוש של קבוע	פירוש של פונקציות	פירוש של סימני יחס

מבנה עבור מילון Σ:

1) תחום D - קבוצה לא ריקה

2) פירושים עבור סימנים במילון:

א) קבועים - לכל קבוע c נתשוים איבר בתחום

ב) סימני יחס $R(\,,\,)$, נתשוים תת קבוצה של $D \times D$

$G(\,)$, נתשוים תת קבוצה של D

ג) סימני פונקציה $f(\,)$, נתשוים פונקציה מ-D ל-D

$g(\,,\,)$, נתשוים פונקציה $D \times D \rightarrow D$

דוגמאות: מבנים עבור $\Sigma = \{c, f_1(\,,\,), f_2(\,,\,), R(\,,\,)\}$:

א	ב
D מספרים טבעיים	מספרים ממשים - D
פירוש של c - מספר 0	פירוש של c - מספר 0
פירוש של f_1 - פונקצית חיבור	פירוש של f_1 - פונקצית חיבור
פירוש של f_2 - פונקציית כפל	פירוש של f_2 - פונקציית כפל
פירוש של R - יחס "קטן"	פירוש של R - יחס קטן

עבור הנוסחה: $\forall x \exists y. R(y,x)$: נוסחה כזו היא true במבנה ב'

ו- false במבנה א'.

ג) תחום - תתי קבוצות של טבעיים
c - קבוצה ריקה
f_1, f_2 - איחוד וחיתוך של קבוצות
R - מפורש כיחס הכלה ממש

- הנוסחה $\forall x \exists y\ R(y,x)$ תקבל ערך false במבנה ג׳
ו- true במבנה ב׳.

- הנוסחה: $\exists x.\ R(x, f_2(x,x))$ - מקבל true ב-א׳ ו-false ב-ג׳.

ד) תחום - המחרוזות מעל $\{0,1\}$ שמתחילות ב- 1, ומחרוזת "0"
c - מחרוזת "0"
f_1 - מפורשת כחיבור בינארי $(f_1(101, 11) = 1000)$
f_2 - כפל בינארי
R - סדר "לקסיקוגרפי" (או יחס "קטן" הבינארי)

- הנוסחה $\exists x.\ R(x, f_2(x,x))$ מקבל true ב-ד׳ ו-false ב- ג׳.
אבל אי אפשר להפריד בין א׳ ל- ד׳. כי הם בעצם "אותו מבנה"
(מבנים איזומורפיים)

סימנטיקה:

- ערך של שם עצם t במבנה M וסביבה ρ - איבר בתחום
- ערך של נוסחה במבנה M וסביבה ρ - true או false
- סביבה ρ: לכל משתנה מתאימה איבר בתחום.

סימון: $[\![t]\!]^{M}_{\rho}$, $[\![\varphi]\!]^{M}_{\rho}$
(M - מבנה, ρ - סביבה, t - שם עצם, φ - נוסחה.)

שם עצם:

בסיס: א) משתנה x - $\rho(x)$
ב) קבוע c - c^M

מעבר: f דו מקומית:
$$[\![f(t_1,t_2)]\!]_{\rho} = f^M\left([\![t_1]\!]^M_{\rho}, [\![t_2]\!]^M_{\rho}\right)$$

Scanned by CamScanner

משפט (Sanity test):

נניח ρ ו-ρ' סביבות ששוות על משתנים שמופיעים ב-t, אזי:

$$[\![t]\!]^M_\rho = [\![t]\!]^M_{\rho'}$$

(הוכחה באינדוקציה מבנית)

משפט:

$$[\![t\{\tfrac{t_1}{x}\}]\!]^M_\rho = [\![t]\!]^M_{\underbrace{\rho\left[\frac{[\![t_1]\!]_\rho}{x}\right]}_{\text{סביבה מעודכנת}}}$$

עדכון סביבה:

$$\rho\left[\frac{\overset{\text{איבר בתחום}}{d}}{\underset{\text{משתנה}}{x}}\right]$$

ערך של נוסחה φ במבנה M וסביבה ρ (סימון: $[\![\varphi]\!]^M_\rho$):

בסיס:

נוסחאות אטומיות: $\varphi ::= R(t_1, t_2, t_3)$

$$[\![\varphi]\!]^M_\rho = \begin{cases} true & \langle [\![t_1]\!]^M_\rho, [\![t_2]\!]^M_\rho, [\![t_3]\!]^M_\rho \rangle \in R^M \\ false & \text{אחרת} \end{cases}$$

מעבר אינדוקציה:

קשרים בוליאניים: $[\![\varphi_1 \circ \varphi_2]\!]^M_\rho = h_\circ([\![\varphi_1]\!]^M_\rho, [\![\varphi_2]\!]^M_\rho)$, $\circ \in \{\land, \lor, \leftrightarrow, \to\}$

כמתים:

$$[\![\forall x.\varphi]\!]^M_\rho = \begin{cases} true & \text{אם לכל איבר בתחום } a \quad [\![\varphi]\!]^M_{\rho[\frac{a}{x}]} \\ false & \text{אחרת} \end{cases}$$

ובאופן דומה עבור כמת $\exists$.

דוגמה:

M_{arithm} - מבנה: מילון - $\Sigma_{arithm}\{c_0, c_1, f(), R(,)\}$

תחום - טבעיים.

c_0 - פרושו 0 , c_1 - פרושו 1

R - יחס קטן

f - פונקציית עוקב - successor

$f(c_0) = 1$

$f(f(c_0)) = 2$

$f(c_1) = 2$

$f(x)\{\frac{f(f(c_0))}{x}\}$

Scanned by CamScanner

$$[\![\forall x.\ R(x,y)]\!]^{M_{arith}}_{\rho} = \text{false}$$

סביבה בה y מקבלת ערך 23

$$[\![\forall x.\ R(x,y)\left\{\frac{f(f\dots f(c_0))}{y}\right\}]\!]^{M_{arith}}_{\rho} = [\![\forall x.\ R(x,y)]\!]^{M_{arith}}_{\rho\left[\frac{23}{y}\right]}$$

כמו הערך של

משפט:

נניח ρ ו- ρ' סביבות ששוות על משתנים שמופיעים חופשי ב-φ

אזי:

$$[\![\varphi]\!]^{M}_{\rho} = [\![\varphi]\!]^{M}_{\rho'}$$

משפט:

$$[\![\varphi\left\{\frac{t_1}{x}\right\}]\!]^{M}_{\rho} = [\![\varphi]\!]^{M}_{\rho\left[\frac{[\![t_1]\!]_{\rho}}{x}\right]}$$

הוכחה באינדוקציה מבנית.

הגדרה: (איזומורפיזם)

F איזומורפיזם ממבנה M למבנה N אם:

$F: D^M \to D^N$ חח"ע ועל

עבור כל סימן קבוע c $\quad F(c^M) = c^N$

עבור כל סימן יחס דו מקומי R ולכל זוג איברים a_1, a_2 ב- D^M אזי:

$$\langle F(a_1), F(a_2)\rangle \in R^N \iff \langle a_1, a_2\rangle \in R^M$$

לכל סימן פונקציה f ואיברים a_1, a_2, a_3

$$F(f(a_1,a_2,a_3)) = f(F(a_1), F(a_2), F(a_3))$$

משפט:

אם M איזומורפי ל- N אזי עבור כל נוסחה ללא משתנים חופשיים

(כלומר פסוקים) $\quad [\![\varphi]\!]^M = [\![\varphi]\!]^N$

נניח כי F איזומורפיזם מ- M ל- N ו- ρ_M, ρ_N סביבות

"מתאימות" על ידי F, כלומר, לכל x $\quad F(\rho_M(x)) = \rho_N(x)$ אזי:

$$\begin{cases} [\![t]\!]^N_{\rho_N} = F([\![t]\!]^M_{\rho_M}) \\ [\![\varphi]\!]^N_{\rho_N} = [\![\varphi]\!]^M_{\rho_M} \end{cases}$$

מושגים סמנטיים בסיסיים:

1) נוסחה φ מסתפקת (נכונה) במבנה M וסביבה ρ אם:

$$[|\varphi|]_\rho^M = true$$

2) φ ספיקה במבנה M אם קיימת סביבה ρ שמספקת את φ ב-M.

3) φ ספיקה אם קיים מבנה שבו φ ספיקה

4) φ נכונה במבנה M אם כל סביבה ρ מספקת את φ ב-M

5) φ נכונה / תקיפה אם φ נכונה בכל מבנה.

6) φ שקולה ל-ψ, אם בכל מבנה ובכל סביבה הם מקבלים אותו ערך.

דוגמאות לנוסחות תקפות:

$$\forall x.\ R(x) \vee \neg R(x)$$

$$\exists x.\ R(x) \vee \neg R(x)$$

$$\forall x.\ R(x) \rightarrow R(x)$$

$$R(x) \vee \neg R(x)$$

(החלפנו משתנה פסוק בנוסחה $R(x)$ ואז הוספנו כמתים)

$$\forall x. R(x) \longrightarrow \exists x. R(x)$$

שקולות:

$$(\neg \forall x. R(x)) \leftrightarrow (\exists x.\ \neg R(x))$$

$$(\forall x \forall y.\ \varphi) \leftrightarrow (\forall y \forall x.\ \varphi)$$

← אם $\forall x.\varphi$ תקיפה אזי: א) φ תקיפה ב) $\exists x.\varphi$ תקיפה — נכון

← אם $\exists x.\varphi$ תקיפה אזי: א) φ תקיפה ב) $\forall x \varphi$ תקיפה — מה לא נכון!

$\exists x(R(x) \longleftrightarrow \exists y. R(y))$ תקיפה אבל $R(x) \leftrightarrow \exists y. R(y)$ לא תקיפה.

← אם $\exists x.\varphi$ ספיקה: א) φ ספיקה (נכון) ב) $\forall x.\varphi$ ספיקה (לא נכון)

הוכחה של ג :

נניח $\exists x.\varphi$ ספיקה ב- M וסביבה ρ לכן יש $a\in D^M$

ש- $[\![\varphi]\!]^M_{\rho[\frac{a}{x}]} = true$ לפי הגדרה, לכן φ ספיקה ב- M.

שקילויות (המרת כמתים):

$$\neg\forall x.\varphi \equiv \exists x.\neg\varphi$$

$$\neg\exists x.\varphi \equiv \forall x.\neg\varphi$$

אם x לא חופ

$$\left.\begin{aligned} \varphi\wedge\exists x.\psi &\equiv \exists x.\varphi\wedge\psi \\ \varphi\vee\exists x.\psi &\equiv \exists x.\varphi\vee\psi \\ \varphi\wedge\forall x.\psi &\equiv \forall x.\varphi\wedge\psi \\ \varphi\vee\forall x.\psi &\equiv \forall x.\varphi\vee\psi \end{aligned}\right\}$$

הגדרה:

נוסחה ב- PNF (prenex normal form):

כמתים | נוסחה ללא כמתים

משפט:

כל נוסחה שקולה לנוסחה ב- PNF (ויש אלגוריתם למצ

Scanned by CamScanner

<u>הוכחה של ג:</u>

נניח $\exists x.\varphi$ ספיקה ב- M וסביבה ρ לכן יש $a \in D^M$ כך ש-
ש$[\![\varphi]\!]^M_{\rho\left[\frac{a}{x}\right]} = true$ לפי הגדרה, לכן φ ספיקה ב- M.

<u>שקולויות (הזזת כמתים):</u>

$$\neg \forall x.\varphi \equiv \exists x.\neg\varphi$$

$$\neg \exists x.\varphi \equiv \forall x.\neg\varphi$$

אם x לא חופשי ב- φ:

$$\left.\begin{aligned}
\varphi \wedge \exists x.\psi &\equiv \exists x.\,\varphi\wedge\psi\\
\varphi \vee \exists x.\psi &\equiv \exists x.\,\varphi\vee\psi\\
\varphi \wedge \forall x.\psi &\equiv \forall x.\,\varphi\wedge\psi\\
\varphi \vee \forall x.\psi &\equiv \forall x.\,\varphi\vee\psi
\end{aligned}\right\}$$

<u>הגדרה:</u>

נוסחה ב- PNF (prenex normal form):

$\boxed{\text{כמתים}}\ \boxed{\text{נוסחה ללא כמתים}}$

<u>משפט:</u>

כל נוסחה שקולה לנוסחה ב- PNF (ויש אלגוריתם לעשות כך)