הרצאה #5

תזכורת:

משפט השלמות:

$\Gamma \models A$ אמ"מ $\Gamma \vdash_{HPC} A$

משפט הקומפקטיות:

א) אם $\Gamma \models A$ אזי יש תת קבוצה סופית $\Delta \subseteq \Gamma$ כך ש- $\Delta \models A$

ב) אם כל תת קבוצה סופית של Γ ספיקה אז Γ ספיקה.

משפט Debruin Erdős

אם לכל תת גרף סופי של גרף אינסופי G ניתן לצבוע ב- K צבעים

אזי G ניתן לצבוע ב- K צבעים.

נוכיח עבור $K=5$:

רעיון:

נצרין אם גרף ניתן לצביעה ב- 5 צבעים בתחשיב הפסוקים.

צביעה:

משתנים: $P_{v_1},\dots,P_{v_5}$ לכל צומת $v \in V_G$

לכל צומת v:

$$\Gamma_G^{nods} \begin{cases} P_{v_1} \vee P_{v_2} \vee P_{v_3} \vee P_{v_4} \vee P_{v_5} \\ P_{v_1} \to (\neg P_{v_2} \wedge \neg P_{v_3} \wedge \neg P_{v_4} \wedge \neg P_{v_5}) \\ P_{v_2} \to (\neg P_{v_1} \wedge \neg P_{v_3} \wedge \neg P_{v_4} \wedge \neg P_{v_5}) \\ \vdots \end{cases}$$

יהי C צביעה של G. $C : V_G \to \{1,\dots,5\}$

נגדיר:
$$P_{v_i} = \begin{cases} True & \text{אם הצומת } v \text{ צבוע בצבע ה- } i \\ False & \text{אחרת} \end{cases}$$

(כמה צבעים התנאים של השורה $P_{v_i}=T$ או $P_{v_i}=f$)

נניח סבובה f שמספקת את Γ_G^{nods}. נגדיר צביעה C_f של G:

$C_f(v) = i \iff f(P_{v,i}) = True$

טענה: C_f צביעה

נסכם 3צביעה חוקית:
לכל קשת uv ב-G:

$$\Gamma_G^{edges}\begin{cases} p_{u,1}\to \neg p_{v,1} \\ \vdots \\ p_{u,5}\to \neg p_{v,5}\end{cases}$$

למה:

$\Gamma_G^{nods}\cup\Gamma_G^{edges}$ ספיק אמ"מ G ניתן לצביעה ב-5 צבעים

הוכחה: G ניתן לצביעה ב-5 צבעים אמ"מ $\Gamma_G^{nods}\cup\Gamma_G^{edges}$ ספיקה.
לפי קומפקטיות, $\Gamma_G^{edges}\cup\Gamma_G^{nodes}$ ספיקה אמ"מ כל תת קבוצה סופית Δ כ $\Gamma_G^{edges}\cup\Gamma_G^{nodes}$ ספיקה. תהי Δ תתקבוצה סופית.
נגדיר: $Vertices(\Delta)=\{v \mid \Delta\text{-מופיע ב } p_{v,i}\}$.
נסתכל על תת הגרף של $Vertices(\Delta)$, G_Δ.
G_Δ סופי ולכן ניתן לצביעה ב-5 צבעים ולכן Δ ספיקה
וסיימנו.

לוגיקה מסדר ראשון - תורת הפרדיקטים

1) נלמד שפת לוגיקה מסדר ראשון
2) סמנטיקה של לוגיקה מסדר ראשון

- קבוצות אינסופיות
- פונקציות על קבוצות
- יחסים על קבוצות

} עולם סמנטי עשיר

- נוסחה ספיקה, יחס נביעה $A\models\Gamma$. (בתורת הפסוקים יש אלגוריתם לבדיקה האם פסוק הוא טאוטולוגיה, נובעת וכו', עבור לוגיקה מסדר ראשון אין אלגוריתם כזה.
- תחשיב הילברט HP עבור לוגיקה מסדר ראשון
- נוכיח את משפט השלמות: $\Gamma\models A$ אמ"מ $\Gamma\vdash_{HP} A$

אנליזה של טענות בשפה הטבעית :

1.א. כל בן אדם הוא בן תמותה

ב. סוקרטס הוא בן אדם ולכן הוא בן תמותה

2. כל מספר שאינו אפס הוא עוקב של מספר אחר

3. כל סטודנט שלומד מדעי המחשב חייב ללמוד גם בחוג נוסף שאינו הרפואה

נשים לב שלא ניתן להכריע את הפסוקים הללו בעזרת תורת הפסוקים

מה מופיע במשפטים :

שמות עצם : סוקרטס , הרפואה, אפס...

יחסים : בן אדם , בר תמותה , שוויון

שמות פונקציות : עוקב.

א.1 $\forall x.\ BenAdam(x) \longrightarrow BarTmuta(x)$

2. $\forall x\ (Mispar(x) \wedge \neg(x=0) \longrightarrow$
$\exists y.\ Mispar(y) \wedge x = succ(y))$

3. $\forall x\ Student(x) \wedge lomed(cs, x) \longrightarrow$
$\exists y\ Mug(y) \wedge lomed(y, x) \wedge \neg(y = med)$

מילון :

Σ - אוסף של הקבועים , סימני פונקציה וסימני יחס.

לכל סימן פונקציה יש את המידע של כמה ארגומנטים יש לה

לוגיקה מסדר ראשון מעל מילון Σ אלפאבית Σ

סימנים משותפים לכל הלוגיקות (לא תלוי ב- Σ)

א) קשרים : $\leftrightarrow, \rightarrow, \vee, \wedge, \neg$

ב) כמתים : $\forall, \exists$

ג) סימני עזר : $($, $)$, ','

ד) משתנים : $x_1, x_2, \ldots$

Scanned by CamScanner

שמות עצם , נוסחאות:

הגדרה:

שמות עצם מעל Σ:

א) כל משתנה הוא שם עצם

ב) כל קבוע ב- Σ הוא שם עצם

ג) אם f סימן פונקציה k מקומית ו- $t_1,\dots,t_k$ שמות עצם מעל Σ אזי $f(t_1,\dots,t_k)$ שם עצם.

ד) אוסף שמות העצם הוא הקבוצה הקטנה ביותר המקיימת את א-ג.

דוגמאות:

Σ: $\overbrace{a, b}^{\text{קבועים}}$, $f(\,)$, $g(\,,\,)$, $R(\,,\,)$

- $f(a)$ כן ש"ע
- $g(a)$ לא ש"ע
- $g(a, x_3)$ כן ש"ע
- $g(b,b)$ כן ש"ע
- $g(f(x_2), a)$ כן ש"ע
- $R(\,, x_3)$ לא ש"ע

עקרון אינדוקציה מבנית על שמות עצם:

כדי להראות שכל שם עצם מעל Σ מקיים תכונה P מספיק להראות:

בסיס: א) לכל קבוע יש תכונה P

ב) לכל משתנה יש תכונה P

צעד: עבור כל סימן פונקציה f יש כלל מעבר:

אם f חד מקומית, צ"ל: אם ל- t יש את התכונה P אזי ל- $f(t)$ יש תכונה P וכנ"ל עבור כל פונקציה k מקומית

הגדרה (נוסחה אטומית):

אם R יחס k מקומי ו- $t_1,\dots,t_k$ שמות עצם, אזי $R(t_1,\dots,t_k)$ נוסחה אטומית.

נוסחאות:

א) כל נוסחה אטומית היא נוסחה

ב) אם A,B נוסחאות אזי $(A\circ B)$ ו- $\neg A$ נוסחאות. $\circ\in\{\wedge,\vee,\to,\leftrightarrow\}$

ג) אם A נוסחה ו- x משתנה אזי:

$\forall x.\ A$, $\exists x.\ A$ נוסחאות.

3) אוסף הנוסחאות היא הקבוצה הקטנה ביותר המקיימת א'-ג'.

דוגמאות: $f(R(a,a))$ - לא נוסחה

$R(a,b)$ - כן נוסחה

$R(g(x_3,x_3),f(x_7))$ - כן נוסחה

$p(x_3)\to p(f(a))$ - כן נוסחה (כאשר p יחס)

עקרון אינדוקציה על נוסחאות:

כדי להראות שלכל נוסחה יש תכונה P מספיק להראות:

בסיס: לכל נוסחה אטומית יש את התכונה.

צעד: אם A,B נוסחאות בעלות התכונה P אזי גם ל- $(B\circ A)$ $\circ\in\{\wedge,\vee,\to,\leftrightarrow\}$, $\neg A$, $\forall x.\ A$, $\exists x.\ A$ יש את התכונה P.

תפקיד של משתנים:

הערך של: $5+4$: 9

$y+3$: תלוי ב- y

$\int_0^1 y^2\,dy$: לא תלוי ב- y

$\frac{1}{2}x=\int_0^1 xy\,dy$: תלוי ב- x

$y^2=y$: תלוי ב- y

$\forall y\,(y^2=y)$: לא תלוי ב- y

$\forall x\ \frac{1}{2}x=\int_0^1 xy\,dy$: לא תלוי ב- x

אם $x=7$: $\frac{7}{2}=\int_0^1 7y\,dy$: לא תלוי ב- y

אם $x=z^2+3$:

$\frac{z^2+3}{2}=\int_0^1 (z^2+3)y\,dy$: תלוי ב- z

אם $x=y$: $\frac{1}{2}y=\int_0^1 y\cdot y\,dy$: תלוי ב- y

תפקיד של משתנים:

א- $\forall x.\ A(x)$ אפשר להסיק $A(7)$ לדוגמא:

$\forall x(\underbrace{\exists y.\ y \neq x}_{A})$ אזי $\exists y.\ y \neq 7$. אבל: $\exists y\ (z+3 \neq y)$

נציב $z+3=y$ ונקבל $\exists y.\ y \neq y$

מופעים של כל משתנה:

- חופשיים (free)
- קשורים (bounded)
- קושרים (binding)

הגדרה:

מופע חופשי/קשור/קושר של משתנה:

א) בנוסחה אטומית כל המופעים חופשיים

ב) קשרים בוליאנים לא משנים סטטוס מופע של A.

ג) כמתים: $\underset{\text{קושר}}{\forall x}.\ A$ [כאן משתנים קושרים או קשורים]

שלד של נוסחה:

א) לכל משתנה קשור נשים נקודה • אבל שומרים את הצד

ב) מוחקים שמות של קושרים ומצביעים חץ לכמת:

$\forall x.\ p(x) \wedge q(x,y) \wedge \exists y.\ p(y)$

$\forall\ p(\bullet) \wedge q(\bullet, y) \wedge \exists\ p(\bullet)$

הגדרה:

נוסחאות A,B שקולות שלד אם ל-A ול-B יש בדיוק את אותו השלד.

טענה:

לכל נוסחה A יש נוסחה B, שקולת שלד ל-A כך שלכל המשתנים הקושרים יש שמות שונים ושמות אלו שונים מהשמות של המשתנים החופשיים.

הצבה של t במקום מופעים חופשיים של y בנוסחה A:

הצבה של t במקום y (כאשר y ש"ע):

הגדרה מיידית באינדוקציה מבנית של t.

הצבה בנוסחה:

סימון: $A\{\frac{t}{y}\}$

<u>בסיס:</u> A נוסחה אטומית.

$$R(t_1,t_2,t_3)\{\tfrac{t}{y}\} = R\left(t_1\{\tfrac{t}{y}\},\ t_2\{\tfrac{t}{y}\},\ t_3\{\tfrac{t}{y}\}\right)$$

<u>מעבר:</u> קשרים בינאריים:

$$(A \circ B)\{\tfrac{t}{y}\} = \left(A\{\tfrac{t}{y}\} \circ B\{\tfrac{t}{y}\}\right) \qquad \circ \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$$

כמתים: $(\forall x.\ A)\{\frac{t}{y}\}$:

אם $y=x$ אז אין מופעים חופשיים ולכן לא עושים כלום

אם $x \neq y$ ו- x לא מופיע ב- t:

$$(\forall x.\ A)\{\tfrac{t}{y}\} = \forall x.\left(A\{\tfrac{t}{y}\}\right)$$

אם x מופיע ב- t נבחר z שלא מופיע בנוסחה A ונכתוב:

$$(\forall x.\ A)\{\tfrac{t}{y}\} = \left[\forall z.\ A\{\tfrac{z}{x}\}\right]\{\tfrac{t}{y}\}$$

אם A ו- B שקולות שלב 3 אזי $A\{\frac{t}{y}\}$ ו- $B\{\frac{t}{y}\}$ שקולות שלב 3

אם A ו- B שקולות שלב 3 אזי הן שקולות סמנטית.

Scanned by CamScanner