Hilbert Propositional Calculus

Ax1 $A \to (B \to A)$

Ax2 $(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$

Ax3 $(\neg B \to \neg A) \to ((\neg B \to A) \to B)$

Inference Rules

MP Derive B from A and $A \to B$.

Some useful provable (in HPC) formulas (ref. Mendelson).

1. $A \to B,\ B \to C \vdash A \to C$
2. $A \to (B \to C),\ B \vdash A \to C$
3. $A \to A$
4. $(\neg\neg B) \to B$
5. $B \to (\neg\neg B)$
6. $\neg A \to (A \to B)$
7. $(\neg B \to \neg A) \to (A \to B)$
8. $(A \to B) \to ((\neg A \to B) \to B))$

Proof of $A \to B,\ B \to C \vdash A \to C$

We show

$$A \to B,\ B \to C,\ A \vdash C$$

and then by Deduction Theorem conclude
$A \to B,\ B \to C \vdash A \to C.$

Proof of $A \to B,\ B \to C,\ A \vdash C$

1. $A \to B$
2. $B \to C$
3. A

MP 4. B

MP 5. C

Proof of $\vdash (\neg A \to (A \to B))$

We first prove

$$\neg A,\ A \vdash B$$

1. $\neg A$
2. A
3. $(A \to (\neg B \to A))$
4. $(\neg A \to (\neg B \to \neg A))$
5. $\neg B \to A$
6. $\neg B \to \neg A$
7. $(\neg B \to \neg A) \to ((\neg B \to A) \to B)$
8. $((\neg B \to A) \to B)$
9. B

20/4/2017

הרצאה #4

תזכורת:

- **תורת ההוכחות:**

מערכות הוכחה פורמליות

- הוכחה של A מ-Γ במערכת S. סימון: $\Gamma \vdash_S A$
- משפט ב-S: A משפט ב-S אם $\emptyset \vdash_S A$
- תכונות של יחס יכיחות כלליות
- מערכת HPC
- מטרה: משפט השלמות: $\Gamma \vdash_{HPC} A$ אמ"מ $\Gamma \models A$
- מקרה פרטי: $\Gamma = \emptyset$, A משפט ב-HPC אמ"מ A טאוטולוגיה.
- כיוון קל של משפט השלמות: משפט הנאותות (Soundness): אם $\Gamma \vdash_{HPC} A$ אזי $\Gamma \models A$. באינדוקציה על אורך הוכחה HPC
- כיוון קשה שלפעמים גם נקרא משפט השלמות.

סימון שנשתמש בו: $\vdash$ במקום $\vdash_{HPC}$

נושאי השיעור:

- נראה הוכחות ב-HPC
- נוכיח משפטים על הוכחות.

נוכיח את: $A \to A$: הוכחה:

1) $(A \to ((A \to A) \to A)) \to ((A \to (A \to A)) \to (A \to A))$

$Ax2: \ A \Rightarrow A \quad B \Rightarrow (A \to A), \ C \Rightarrow A$

2) $A \to ((A \to A) \to A)$

$Ax1$

3) $((A \to (A \to A)) \to (A \to A))$

$1 \ \& \ 2 \ MP$

4) $(A \to (A \to A))$ $\quad Ax1$

5) $(A \to A)$ $\quad MP$

משפטים של הוכחות ב- HPC :

משפט: אם A אזי B.

הוכחה: נניח A.

⋮

קיבלנו B

לכן הוכחנו $A \to B$

משפט (הדדוקציה):

א) מקרה פרטי: אם $A \vdash_{HPC} B$ אזי $\vdash_{HPC} A \to B$

ב) מקרה כללי: אם $\Gamma, A \vdash_{HPC} B$ אזי $\Gamma \vdash_{HPC} A \to B$

הכוון השני נכון אבל טריוויאלי:

אם $\Gamma \vdash A \to B$ אזי $\Gamma, A \vdash B$. הוכחה:

$$\underbrace{\dots}_{\text{הוכחה של } A\to B} \; A \to B \;,\; A \;,\; B$$

באמצעות MP

ג) מקרה ג': יש אלגוריתם שבהנתן הוכחה של B מ- Γ, A בונה הוכחה של $A \to B$ מ- Γ.

הוכחה של משפט הדדוקציה:

נוכיח באינדוקציה על אורך הוכחה (ב- HPC)

בסיס: הוכחה באורך 1.

B הוכחה של B באורך 1 מ- Γ, A ולכן יש 2 אופציות:

1) B נוסחה ב- Γ, A

א) B הוא A

ב) $B \in \Gamma$.

2) B אקסיומה.

צ"ל: $\Gamma \vdash A \to B$.

1.א) הוכחה של 5 שורות שראינו.

1.ב) $B \in \Gamma$. נרשום הוכחה הבאה מ- Γ:

הוכחה של $A \to B$ מ- Γ:

1) B

2) $B \to (A \to B)$ — אקסיומה 1

3) $A \to B$ — מ 1), 2) ו- MP

מקרה 2: B אקסיומה. הוכחה:

הוכחה מ- ϕ
$$\begin{cases} 1) & B \\ 2) & B \to (A \to B) \\ 3) & A \to B \end{cases}$$

<u>מעבר האינדוקציה:</u>

הוכחנו עבור הוכחות באורך $\leq n$.

<u>נוכיח עבור $n+1$</u>:

נתונה הוכחה של B מ- Γ, A באורך $n+1$.

$\varphi_1, \dots, \varphi_{n+1} \equiv B$ הוכחה של B מ- Γ, A

עבור $k \leq n$: $\varphi_1, \dots, \varphi_k$ הוכחה של φ_k מ- Γ, A

לכן לפי הנחת האינדוקציה, עבור $k \leq n$ $\Gamma \vdash A \to \varphi_k$

צ"ל: $\Gamma \vdash A \to \varphi_{n+1}$

<u>מקרים:</u>

1) φ_{n+1} ב- Γ, A
א) φ_{n+1} הוא A
ב) $\varphi_{n+1} \in \Gamma$
2) φ_{n+1} אקסיומה

כמו בבסיס.

3) התקבלה לפי MP מ- φ_i, φ_j

$$\varphi_j \equiv (\varphi_i \to B)$$

$$\begin{cases} \Gamma \vdash A \to \varphi_i \\ \Gamma \vdash A \to \varphi_j \end{cases}$$ לפי הנחת האינדוקציה.

<u>כעת ההוכחה:</u>

1) $\left\{ \begin{array}{l} \vdots \\ A \to \varphi_i \end{array} \right.$ ← הוכחה של $A \to \varphi_i$

2) $\left\{ \begin{array}{l} \vdots \\ A \to \underbrace{(\varphi_i \to B)}_{\varphi_j} \end{array} \right.$ ← הוכחה של $A \to \varphi_j$

3) $(A \to (\varphi_i \to B)) \to ((A \to \varphi_i) \to (A \to B))$ אקסיומה 2)

4) $(A \to \varphi_i) \to (A \to B)$ MP

<u>שלד של הוכחה לפי מקרים של משפט B</u>:

<u>הוכחה</u>:

לפי מקרים: א) נניח A

$\vdots$

מוכיחים B

ב) נניח $\neg A$

$\vdots$

מוכיחים B

מסקנה: B נכונה.

<u>משפט</u>:

הוכחה לפי מקרים עבור HPC:

אם $\Gamma, A \vdash_{HPC} B$ ו- $\Gamma, \neg A \vdash_{HPC} B$ אזי $\Gamma \vdash_{HPC} B$

וכן, קיים אלגוריתם ליניארי שבהינתן הוכחות של $\Gamma, A \vdash_{HPC} B$ ו- $\Gamma, \neg A \vdash_{HPC} B$ בונה הוכחה ל- $\Gamma \vdash_{HPC} B$

<u>הוכחה</u>:

נניח $\Gamma, A \vdash B$ ו- $\Gamma, \neg A \vdash B$

לכן:
1) $\Gamma \vdash A \to B$ — לפי משפט הדדוקציה
2) $\Gamma \vdash \neg A \to B$ — לפי משפט הדדוקציה
3) $\emptyset \vdash (A \to B) \to ((\neg A \to B) \to B)$ (נוכיח בבית)
4) $(\neg A \to B) \to B$ — מ- 1, 3 לפי MP
5) B — מ- 2, 4 לפי MP

<u>הגדרה</u>:

- קבוצה Γ <u>עקבית</u> (ב- HPC) אם יש נוסחה שלא ניתנת להוכחה מ- Γ
- קבוצה Γ <u>לא עקבית</u> אם כל נוסחה ניתנת להוכחה מ- Γ

למה:

Γ לא עקבית אם"ם יש A כך ש- $\Gamma \vdash A$ ו- $\Gamma \vdash \neg A$

הוכחה:

$\Leftarrow$ מיידי

$\Rightarrow$:

נקח B נב: $\Gamma \vdash B$: הוכחה:

$\left.\begin{matrix}\vdots\\ A\end{matrix}\right\}$ הוכחה של A (נתון)

$\left.\begin{matrix}\vdots\\ \neg A\end{matrix}\right\}$ הוכחה של $\neg A$ (נתון)

$\neg A \to (A \to B)$ הוכחתי מקודם

$A \to B$ לפי MP

B לפי MP

∎

גרסה לספיקות של משפט השלמות:

1) אם Γ עקבית אזי Γ ספיקה

1.5) אם Γ לא ספיקה אזי Γ לא עקבית

2) משפט (שלמות): אם $\Gamma \models A$ אזי $\Gamma \vdash A$

נוכיח ש- $1.5 \to 2$:

נניח $\Gamma \models A$ נב"ל $\Gamma \vdash A$. לכן $\Gamma \cup \neg A$ לא ספיקה לכן לפי
1.5 Γ לא עקבית. בפרט: $\Gamma, \neg A \vdash A$ וגם $\Gamma, A \vdash A$
ולכן לפי משפט הוכחה לפי מקרים $\Gamma \vdash A$

נוכיח ש- $2 \to 1.5$:

נניח ש- Γ לא ספיקה נב"ל Γ לא עקבית.
Γ לא ספיקה, ולכן כל נוסחה נובעת סמנטית מ- Γ:
לכל A $\Gamma \models A$, ומ- 2 נקבל ש- $\Gamma \vdash A$ לכל נוסחה A
ולכן Γ לא עקבית.

∎

הגדרה:

Γ עקבית מקסימלית אם Γ עקבית ולא מוכלת ממש בקבוצה עקבית אחרת.

תכונות של קבוצות עקביות מקסימליות:

אם Γ עקבית מקסימלית:

1) אם $\Gamma \vdash A$ אזי $A \in \Gamma$.

2) לכל A, $A \in \Gamma$ או $\neg A \in \Gamma$

3) $(A \to B) \in \Gamma \iff B \in \Gamma$ או $A \notin \Gamma$

הוכחה של 1):

אם $A \notin \Gamma$ אזי $\Gamma \cup A$ לא עקבית (לפי מקסימליות)

לכן, לכל B $\Gamma, A \vdash B$. בפרט $\Gamma, A \vdash \neg A$

לכן לפי טרנזיטיביות $\Gamma \vdash \neg A$ ולכן Γ לא עקבית (בסתירה).

הוכחה של 2):

נניח $A \notin \Gamma$ ונוכיח ש- $\neg A \in \Gamma$

(לפי מקסימליות) $\Gamma \cup A$ לא עקבית. ולכן עבור כל B $\Gamma, A \vdash B$

בפרט: $\Gamma, A \vdash \neg A$, $\Gamma, \neg A \vdash \neg A \} \Rightarrow$ (לפי משפט הוכחה לפי מקרים)

לכן $\Gamma \vdash \neg A$ לכן $\neg A \in \Gamma$ לפי 1)

הוכחה של 3)

$\Leftarrow$: נניח $(A \to B) \in \Gamma$ ונניח $B \notin \Gamma$ נ"צ: $A \notin \Gamma$.

נניח בשלילה ש- $A \in \Gamma$, ולכן, מכך ש- $(A \to B) \in \Gamma$ נקבל:

$$\begin{cases} \Gamma \vdash A \\ \Gamma \vdash (A \to B) \end{cases}$$

ולכן: $\Gamma \vdash B$ ולכן $B \in \Gamma$ מ- 1 בסתירה ולכן $A \notin \Gamma$

$\Rightarrow$: מקרה א: $B \in \Gamma$, אזי $B \to (A \to B)$ (אקסיומה 1)

ולכן $\Gamma \vdash (A \to B) \Longleftarrow (A \to B) \in \Gamma$ מ- 1.

מקרה ב: $A \notin \Gamma$ אזי $\neg A \in \Gamma$ לפי 2 $\Longleftarrow$

וכן $\neg A \to (A \to B)$ (טענה 6 בדפים)

ולכן: $\Gamma \vdash (A \to B)$ ומכאן ש- $(A \to B) \in \Gamma$ מ-(1)

■

<u>מטרה:</u>

להוכיח את המשפט: אם Γ עקבית אזי Γ ספיקה

<u>למה 1:</u>

כל קבוצה עקבית מוכלת בקבוצה עקבית מקסימלית

<u>למה 2:</u>

כל קבוצה עקבית מקסימלית ספיקה.

<u>הוכחה של למה 1:</u>

יהי $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ רשימה אינסופית של כל הנוסחאות.

נגדיר קבוצות Γ_n שמכילות את Γ וגם כן עקביות.

$$\Gamma_0 := \Gamma$$

$$\Gamma_{n+1} := \begin{cases} \Gamma_n \cup \{A_{n+1}\} & \text{אם } A_n \cup \Gamma_n \text{ עקבית} \\ \Gamma_n \cup \{\neg A_{n+1}\} & \text{אחרת} \end{cases}$$

<u>טענה 1:</u>

לכל n, Γ_n עקבית.

<u>טענה 2:</u>

$\bigcup_{n=0}^{\infty} \Gamma_n$ עקבית ומקסימלית.

<u>הוכחה:</u> באינדוקציה על n:

בסיס: $n = 0$ מ"ד Γ עקבית

מעבר אינדוקציה:

$n \to n+1$. Γ_n עקבית. צ"ל: Γ_{n+1} עקבית.

א) אם $\Gamma_{n+1} = \Gamma_n \cup A_{n+1}$ לפי הגדרה, הוא עקבית.

ב) אם $\Gamma_{n+1} = \Gamma_n \cup \neg A_{n+1}$. ידוע ש- $\Gamma_n \cup A_{n+1}$ לא עקבית: נניח ש- Γ_{n+1} לא עקבית ונגיע לסתירה. $\Gamma_n, \neg A_{n+1} \vdash B$ לכל B, וכן $\Gamma_n, A_{n+1} \to B$ לכל B וכן $\Gamma_n \to B$ לכל B ולכן: Γ_n לא עקבית בסתירה.

Scanned by CamScanner

הוכחה של טענה 2:

$$\Gamma_0 \subseteq \Gamma_1 \subseteq \Gamma_2 \subseteq \dots \subseteq \Gamma_i \subseteq \Gamma_{i+1} \subseteq \dots$$

לפי הגדרה $\Delta = \bigcup_{n=0}^{\infty} \Gamma_n$,

אם Δ לא עקבית אזי יש A כך ש- $\Delta \vdash A$ וגם $\Delta \vdash \neg A$. לכן יש n_1 כך ש- $\Gamma_{n_1} \vdash A$ ו- n_2 כך ש- $\Gamma_{n_1} \vdash \neg A$ ולכן נקבל ש:

$$\begin{cases} \Gamma_{max(n_1,n_2)} \vdash A \\ \Gamma_{max(n_1,n_2)} \vdash \neg A \end{cases}$$

ולכן $\Gamma_{max(n_1,n_2)}$ לא עקבית בסתירה לטענה 1.

והמקסימליות נובעת מכך של- Δ הוספנו כל נוסחה או את שלילתה ולכן ברור שהוא מקסימלית (שכן, כל הוספה של נוסחה תהפוך את Δ ללא עקבית) ∎

הוכנו את למה 1. ∎

למה 2:

כל קבוצה עקבית מקסימלית ספיקה.

הוכחה:

נגדיר סביבה g_Γ שמספקת את כל הנוסחאות ב- Γ.

הגדרה:

$$g_\Gamma(p_n) = \begin{cases} true & p_n \in \Gamma \text{ אם} \\ false & p_n \notin \Gamma \end{cases}$$

טענה:

g_Γ מספקת את Γ (לא מתקבל לפי אינדוקציה מבנית ולכן נוכיח טענה יותר חזקה).

טענה חזקה יותר:

לכל A, $[\![A]\!]_{g_\Gamma} = True$ אם"ם $A \in \Gamma$

הוכחה: באינדוקציה מבנית.

בסיס: אם A משתנה אז זה מתקיים לפי ההגדרה של g_Γ

מעבר אינדוקציה: $[\![A \to B]\!]_{g_\Gamma} = T \iff [\![B]\!]_{g_\Gamma} = T$

או $[\![A]\!]_{g_\Gamma} = f$. ומהנחת האינדוקציה $[\![B]\!]_{g_\Gamma} = T \iff B \in \Gamma$

ו- $[\![A]\!]_{g_\Gamma} = f \iff A \notin \Gamma$ כלומר $\neg A \in \Gamma$

ולכן לפי תכונה 3) $\iff (A \to B) \in \Gamma$ כנדרש.

עבור $\neg A$:

$$[\![\neg A]\!]_{g_\Gamma} = T \iff [\![A]\!]_{g_\Gamma} = F \iff A \notin \Gamma \iff \neg A \in \Gamma$$

■

משפט קומפקטיות:

גרסה 1:

אם $\Gamma \models A$ אזי יש תת קבוצה סופית Δ של Γ כך ש- $\Delta \models A$.

גרסה 2:

אם כל תת קבוצה סופית של Γ ספיקה אזי Γ ספיקה.

הוכחת גרסה 1:

אם $\Gamma \models A$ אזי $\Gamma \vdash_{Hpc} A$ לכן לפי קומפקטיות של יחס יכיחות יש Δ סופית, תת קבוצה של Γ כך ש: $\Delta \vdash_{Hpc} A$ ולכן לפי נאותות $\Delta \models A$

■

משפט:

אם כל תת גרף סופי של גרף G ניתן לצביעה חוקית ב- 7 צבעים אזי G ניתן לצביעה חוקית ב- 7 צבעים.

רעיון להוכחה:

נגדיר צביעה לגרף בשפת נוסחאות.