26/3/2017

הרצאה #2

תחביר (Syntax):

אלפבית:

משתנים $p_1, p_2, \dots, p_i, \dots$

קשרים:

$\neg$, $\leftrightarrow$, $\rightarrow$, $\wedge$, $\vee$

סימני סדר: $($, $)$

הוכחה באינדוקציה מבנית

כדי להראות שלכל נוסחא יש תכונה P מספיק:

1) בסיס: להראות שלכל משתנה יש תכונה P.

מעבר: אם ל- φ_1, φ_2 יש תכונה P אזי ל- $\varphi_1 \circ \varphi_2$ יש תכונה P

כאשר $\circ \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ ול- $\neg\varphi_2$ יש תכונה P.

דוגמאות הגדרה באינדוקציה מבנית: עץ גזירה, Rank, subformula

תוכנית להיום: - לסיים עם תחביר

- מושגים סמנטיים בסיסיים.

דוגמה (הוכחה של תכונה של תת קבוצה של כל הנוסחאות):

אם לנוסחה יש מספר הקשרים זוגי אז יש לה תכונה P_2.

נגדיר תכונה P אם לנוסחה יש מספר זוגי של הקשרים אזי יש לה תכונה P_2.

משפט (קריאות יחידה Unique Readability)

1) יש אלגוריתם שבהינתן מחרוזת בודק האם היא נוסחה

2) אם φ נוסחה אזי בדיוק אחד מהמקרים הבאים מתקיים (כאשר φ_1, φ_2 נוסחאות):

א) $\varphi \equiv (\varphi_1 \wedge \varphi_2)$

ב) $\varphi \equiv (\varphi_1 \vee \varphi_2)$

ג) $\varphi \equiv (\varphi_1 \rightarrow \varphi_2)$

ד) $\varphi \equiv (\varphi_1 \leftrightarrow \varphi_2)$

ה) $\varphi \equiv (\neg\varphi_1)$

ו) φ משתנה

3) אם נוסף התנאים ב-2 מתקיימים אזי יש φ_1, φ_2 <u>יחידים</u>

כך ש- $\varphi_1 \circ \varphi_2$, $\circ \in \{\vee, \wedge, \leftrightarrow, \to\}$. ויחידה עבור $\varphi \equiv \neg\varphi_1$, φ משתנה.

<u>הוכחה:</u>

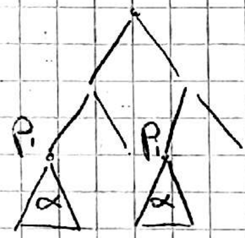
בשיעורי בית + תרגול.

<u>הגדרה:</u> (הצבה)

סימון: $\varphi\left\{\frac{\alpha}{p_i}\right\}$, כאשר α, φ נוסחאות ו- p_i משתנה:

נוסחה שמתקבלת מהחלפה של המופעים של משתנה p_i ב- φ בנוסחה α.

<u>על עצי גזירה:</u>



<u>דוגמה:</u>

$$\varphi \equiv ((p_1 \to p_2) \vee p_1)$$

$$\alpha \equiv (p_1 \to p_2)$$

$$\varphi\left\{\frac{\alpha}{p_1}\right\} \equiv (((p_1 \to p_2) \to p_2) \vee (p_1 \to p_2))$$

<u>הגדרה פורמלית ברקורסיה מבנית על φ:</u>

הצבה $\varphi\left\{\frac{\alpha}{p}\right\}$

1) אם φ משתנה p_i:

א) אם $p_i \equiv p$ אזי $\varphi\left\{\frac{\alpha}{p}\right\} \equiv \alpha$

ב) אם $p_i \not\equiv p$ אזי $\varphi\left\{\frac{\alpha}{p}\right\} \equiv p_i$

2) א) אם $\varphi \equiv (\varphi_1 \circ \varphi_2)$ אזי $\varphi\left\{\frac{\alpha}{p}\right\} \equiv \left(\varphi_1\left\{\frac{\alpha}{p}\right\} \circ \varphi_2\left\{\frac{\alpha}{p}\right\}\right)$ $\circ \in \{\wedge, \vee, \leftrightarrow, \to\}$

טענה:

$\varphi\{\frac{\alpha}{p}\}$ נוסחה.

הוכחה: באינדוקציה מבנית על φ.

1) φ משתנה p_i

א) $p \equiv p_i$ אז α-ש נוסחה. (נובע מיידית מהנתון)

ב) $p \not\equiv p_i$ אז p_i נוסחה (p_i משתנה ולכן בפרט נוסחה)

מעבר אינדוקציה:

א) $\varphi \equiv (\varphi_1 \wedge \varphi_2)$ ולפי הנחת האינדוקציה $\varphi_1\{\frac{\alpha}{p}\}$, $\varphi_2\{\frac{\alpha}{p}\}$ נוסחאות

ואז: $(\varphi_1\{\frac{\alpha}{p}\} \wedge \varphi_2\{\frac{\alpha}{p}\})$ נוסחה. (זה מיידי מהגדרת נוסחה)

הגדרה: (הצבה בו זמנית)

סימון: $\varphi\{\frac{\alpha_1}{p_1}, \frac{\alpha_2}{p_2}, \dots, \frac{\alpha_k}{p_k}\}$, α_i נוסחאות, $p_1,\dots,p_k$ משתנים שונים.

הגדרה באינדוקציה מבנית: $\varphi\{\frac{\alpha_1}{p_1}, \frac{\alpha_2}{p_2}\}$ $p_1 \neq p_2$

1) אם φ משתנה p_i

א) אם $p_i \equiv p_1$ אזי $\varphi\{\frac{\alpha_1}{p_1}, \frac{\alpha_2}{p_2}\} \equiv \alpha_1$

ב) אם $p_i \equiv p_2$ אזי $\varphi\{\frac{\alpha_1}{p_1}, \frac{\alpha_2}{p_2}\} \equiv \alpha_2$

ג) אם $p_i \not\equiv p_1, p_2$ אזי $\varphi\{\frac{\alpha_1}{p_1}, \frac{\alpha_2}{p_2}\} \equiv p_i$

2) מעבר אינדוקציה: כמו בהגדרה של הצבה רגילה

תרגיל

$$\varphi\left\{\frac{\alpha_1}{p_1}, \frac{\alpha_2}{p_2}\right\} \underset{1}{\overset{?}{\equiv}} \varphi\left\{\frac{\alpha_1}{p_1}\right\}\left\{\frac{\alpha_2}{p_2}\right\} \underset{2}{\overset{?}{\equiv}} \varphi\left\{\frac{\alpha_2}{p_2}\right\}\left\{\frac{\alpha_1}{p_1}\right\}$$

דוגמה נגדית ל (1): $\varphi \equiv (p_1 \wedge p_2) \equiv \alpha_1 \equiv \alpha_2$

$$\varphi\left\{\frac{\alpha_1}{p_1}, \frac{\alpha_2}{p_2}\right\} = ((p_1\wedge p_2)\wedge(p_1\wedge p_2))$$

$$\varphi\left\{\frac{\alpha_1}{p_1}\right\}\left\{\frac{\alpha_2}{p_2}\right\} = ((p_1\wedge p_2)\wedge p_2)\left\{\frac{\alpha_2}{p_2}\right\} = ((p_1 \wedge (p_1\wedge p_2))\wedge(p_1\wedge p_2))$$

דוגמה נגדית ל (2): $\varphi \equiv (p_1 \to p_2)$, $\alpha_1 \equiv p_2$, $\alpha_2 \equiv p_1$

$$\varphi\left\{\frac{\alpha_1}{p_1}\right\}\left\{\frac{\alpha_2}{p_2}\right\} = (p_2 \to p_2)\left\{\frac{\alpha_2}{p_2}\right\} = (p_1 \to p_1)$$

$$\varphi\left\{\frac{\alpha_2}{p_2}\right\}\left\{\frac{\alpha_1}{p_1}\right\} = (p_1 \to p_1)\left\{\frac{\alpha_1}{p_1}\right\} = (p_2 \to p_2)$$

הגדרה: (הגדרה באינדוקציה מבנית של נוסחאות)

נניח: $f: Var \longrightarrow D$, D תחום

$h_{\to}, h_{\leftrightarrow}, h_{\vee}, h_{\wedge} : D \times D \longrightarrow D$

$h_{\neg} : D \longrightarrow D$

נגדיר F בצורה הבאה:

$$(*) \begin{cases} F(\text{משתנה}) = f(\text{משתנה}) \\ F((\varphi_1 \circ \varphi_2)) = h_{\circ}(F(\varphi_1), F(\varphi_2)) , \quad \circ \in \{\to, \leftrightarrow, \vee, \wedge\} \end{cases}$$

משפט:

לכל f, $h_{\wedge}$, $h_{\vee}$, $h_{\neg}$, $h_{\leftrightarrow}$, $h_{\to}$ קיימת פונקציה יחידה F מנוסחאות ל-D שמקיימת $(*)$

תחביר קונקרטי:

שם הקשר	סימון בקורס	סימונים נוספים
Conjunction (וגם)	$\wedge$	&, and
disjunction (או)	$\vee$	OR
Implication (גרירה)	$\to$	$\supset$, $:\supset$, $\Longrightarrow$
biimplication	$\leftrightarrow$	$\Longleftrightarrow$
Negation (שלילה)	$\neg$	~A, $\tilde{A}$, -A, $\bar{A}$, !A

תחביר אבסטרקטי:

עץ גזירה

_____ $\circ$ _____

סמנטיקה / משמעות

ערכי אמת: אמת - True (T)

שקר - False (F).

ערכים בחשבון: 5,7,3

מה הערך של $3+17$? 20

מה הערך של 2^2 ? 4

מה הערך של $x+1$? תלוי ב-x

הגדרה: (סביבה)

סביבה היא פונקציה ממשתנים לערכי אמת

סימון: ρ', ρ, ρ_0 - משתנים עבור סביבות

(סביבה $\equiv$ השמה $\equiv$ assigjment)

הגדרה: (ערך של נוסחה φ בסביבה ρ)

סימון: $[\![\varphi]\!]_\rho$, ρ היא סביבה ו- φ היא נוסחה.

הגדרה באינדוקציה מבנית של φ:

א) אם φ משתנה p. $[\![\varphi]\!]_\rho = \rho(p)$

ב) $\varphi \equiv (\varphi_1 \wedge \varphi_2)$

$\mathbb{\wedge}$	T	F
T	T	F
F	F	F

$$[\![\varphi]\!]_\rho = \mathbb{\wedge}\left([\![\varphi_1]\!]_\rho, [\![\varphi_2]\!]_\rho\right)$$

ג) $\varphi \equiv (\varphi_1 \vee \varphi_2)$

$\mathbb{\vee}$	T	F
T	T	T
F	T	F

$$[\![\varphi]\!]_\rho = \mathbb{\vee}\left([\![\varphi_1]\!]_\rho, [\![\varphi_2]\!]_\rho\right)$$

ד) $\varphi \equiv (\varphi_1 \to \varphi_2)$

$\Longrightarrow$	T	F
T	T	F
F	T	T

$$[\![\varphi]\!]_\rho = \Longrightarrow\left([\![\varphi_1]\!]_\rho, [\![\varphi_2]\!]_\rho\right)$$

ה) $\varphi \equiv (\varphi_1 \leftrightarrow \varphi_2)$

$\Longleftrightarrow$	T	F
T	T	F
F	F	T

$$[|\varphi|]_\rho = \Longleftrightarrow \left([|\varphi_1|]_\rho , [|\varphi_2|] \right)$$

ו) $\varphi \equiv (\neg \varphi_1)$

$$\neg : \begin{array}{l} T \to F \\ F \to T \end{array}$$

$$[|\varphi|]_\rho = \neg([|\varphi_1|]_\rho)$$

<u>משפט</u>:

נניח ב- φ מופיעים רק משתנים מהקבוצה $X := \{p_1, \dots, p_k\}$

ונניח סביבות ρ_1, ρ_2 שוות על X. כלומר עבור לכל p ב- X

$\rho_1(p) = \rho_2(p)$ אזי: $[|\varphi|]_{\rho_1} = [|\varphi|]_{\rho_2}$

<u>הוכחה באינדוקציה מבנית</u>:

<u>בסיס</u>: φ משתנה p.

$$\left.\begin{array}{l} [|\varphi|]_{\rho_1} = \rho_1(p) \\ [|\varphi|]_{\rho_2} = \rho_2(p) \end{array}\right\} \text{שוויון מתקבל מהנתון}$$

<u>מעבר</u>: הנחה: ρ_1, ρ_2 שוות על משתנים ב- φ

$\varphi \equiv (\varphi_1 \wedge \varphi_2)$

$$[|\varphi|]_{\rho_1} := \bigwedge\left([|\varphi_1|]_{\rho_1} , [|\varphi_2|]_{\rho_1} \right)$$

$$[|\varphi|]_{\rho_2} := \bigwedge\left([|\varphi_1|]_{\rho_2} , [|\varphi_2|]_{\rho_2} \right)$$

שוויונות אלו מתקבלים מהנחת האינדוקציה.

והוכחה דומה עבור הקשרים האחרים.

■

<u>סימון</u>: $\rho\left[\frac{d}{p}\right]$ סביבה מעודכנת (updated)

d ערך אמת, p משתנה, ρ סביבה

<u>דוגמאות</u>:

$$\rho_1\left[\frac{\rho(p_{15})}{p_3}\right] , \quad \rho_1\left[\frac{t}{p_7}\right] , \quad \rho_1\left[\frac{[|\varphi|]_{\rho_2}}{p_4}\right]$$

סוגריים:

$(,)$ - בתחשיב הפסוקים, תחביר

$\{ , \}$ - הצבות $\varphi\{\frac{\alpha}{p}\}$

$[\![,]\!]$ - סימנטיקה $[\![\varphi]\!]_{\rho}$

$[,]$ - סימנטיקה - עדכון סביבה.

חישוב של ביטוי אריתמטי

מה הערך של $(x^2+1)(x^2+2)$ כש- $x=3$?

חישוב:

דרך א': - לחשב את הערך של x^2+1 - 10 ← $\boxed{\text{לחשב } x^2 \text{, לחשב ולחבר } 1}$

- לחשב את הערך של x^2+2 - 11 ← $\boxed{\text{לחשב } x^2 \text{, לחשב ולחבר } 2}$

- ולהכפיל. - 110

דרך ב': - לפתוח סוגריים ואז לחשב: x^4+3x^2+2

נשים לב ש: $(x^2+1)(x^2+2) \equiv (y+1)(y+2)\{\frac{x^2}{y}\}$

משפט: (הקשר בין הצבות ועדכון סביבות).

$$[\![\varphi\{\tfrac{\alpha}{p}\}]\!]_{\rho} = [\![\varphi]\!]_{\rho[\frac{[\![\alpha]\!]_{\rho}}{p}]}$$

הוכחה באינדוקציה מבנית.

מושגים סמנטיים בסיסיים:

1) ρ מספקת φ אם $[\![\varphi]\!]_{\rho} = T$ (ρ סביבה, φ נוסחה)

2) φ ספיקה אם יש סביבה שמספקת את φ

3) φ טאוטולוגיה אם כל סביבה מספקת את φ.

4) φ סתירה אם לא קיימת סביבה שמספקת את φ.

משפט: φ סתירה $\Longleftrightarrow$ φ לא ספיקה.

5) φ_1 שקולה ל- φ_2 אם לכל ρ $[\![\varphi_1]\!]_{\rho} = [\![\varphi_2]\!]_{\rho}$

6) קבוצת נוסחאות Γ ספיקה אם יש סביבה ρ שמספקת את כל הנוסחאות ב- Γ

7) φ נובעת סמנטית מקבוצת נוסחאות Γ אם כל סביבה שמספקת את Γ מספקת גם את φ.

סימון: $\Gamma \models \varphi$

<u>דוגמאות</u>:

- האם $(p_1 \lor p_2)$ ספיקה? כן
- האם $(p_1 \lor p_2)$ טאוטולוגיה? לא
- האם $(p_1 \lor p_2)$ סתירה? לא
- האם $(p_1 \land \neg p_2)$ ספיקה? כן
- " טאוטולוגיה? לא
- " סתירה? לא
- האם $(p_1 \land \neg p_2) \land (p_1 \lor p_2)$ ספיקה? כן
- " טאוטולוגיה? לא
- $(p_1 \lor \neg p_1)$ - טאוטולוגיה
- $(p_1 \land \neg p_1)$ - סתירה
- האם $\{(p_1 \land p_2), \neg p_1, \neg p_2\}$ ספיקה? לא
- האם $\{(p_1 \land p_2), \neg p_1, \neg p_2\} \models p_3$? כן
- האם $\{(p_1 \land p_2), \neg p_1\} \models p_2$? כן
- האם $\{(p_1 \lor p_2), \neg p_1\} \models p_2$? כן
- האם $\{(p_1 \lor p_2), \neg p_1\} \models p_1$? לא

<u>משפטים פשוטים</u>:

1) φ טאוטולוגיה $\iff$ $\neg\varphi$ סתירה

2) φ נובעת מ- Γ $\iff$ $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ לא ספיקה.

3) $\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_k\}$ ספיקה $\iff$ $(((\varphi_1 \land \varphi_2) \land \varphi_3) \land \ldots \land \varphi_k)$ ספיקה.

4) $\{\varphi_1\} \models \varphi_2$ $\iff$ $(\varphi_1 \to \varphi_2)$ טאוטולוגיה.

<u>כללי חיסכון בסוגריים</u>:

← לא נשים סוגריים חיצוניים: $(p_1 \land p_2) \equiv p_1 \land p_2$

← סדר פעולות: $\neg$, $\land$, $\lor$, $\to$, $\leftrightarrow$

$\neg p_1 \land p_3 \to p_2 \equiv (((\neg p_1) \land p_3) \to p_2)$

← קושרים נוסחאות מימין לשמאל: $p_1 \to p_2 \to p_3 \equiv (p_1 \to (p_2 \to p_3))$

סימון: אם $\Gamma = \emptyset$ אז במקום $\Gamma \models \varphi$ נרשום $\models \varphi$

משפט:

$$\models \varphi \iff \varphi \text{ טאוטולוגיה}$$

סימון: במקום: $\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_k\} \models \varphi$ נרשום: $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_k \models \varphi$

משפט:

נניח α_1 שקולה ל- α_2 אזי $\varphi\left\{\frac{\alpha_1}{p}\right\}$ שקולה ל- $\varphi\left\{\frac{\alpha_2}{p}\right\}$

הוכחה באינדוקציה מבנית על φ

בסיס: אם φ משתנה p_i.

א) $p_i \equiv p$ לכן: α_1 שקולה ל- α_2 (נובע מהנתון)

ב) $p_i \not\equiv p$ לכן: p_i שקולה ל- p_i (ברור)

מעבר האינדוקציה ברור גם כן.

משפט:

אם φ_1 שקולה ל- φ_2 אזי $\varphi_1\left\{\frac{\alpha}{p}\right\}$ שקולה ל- $\varphi_2\left\{\frac{\alpha}{p}\right\}$

1) חוקים פשוטים - de morgan

2) שקילות אלגוריתמיות של משפטים "סימנטיים" בסיסיים

חוקים פשוטים:

1) קומוטטיביות ואסוציאטיביות עבור $\wedge, \vee$:

$(A \vee B)$ שקול ל- $(B \vee A)$

$((A \vee B) \vee C)$ שקול ל- $(A \vee (B \vee C))$

$(A \wedge B)$ שקול ל- $(B \wedge A)$

$((A \wedge B) \wedge C)$ שקול ל- $(A \wedge (B \wedge C))$

הוכחות בעזרת טבלת אמת

$(p_1 \wedge p_2)$ שקול ל- $(p_2 \wedge p_1)$

$p_2 \backslash p_1$	T	F
T	T	F
F	F	F

עבור $(A \wedge B)$ שקול $(B \wedge A)$

$$(p_1 \wedge p_2)\left\{\frac{A}{p_1}, \frac{B}{p_2}\right\} \equiv (p_2 \wedge p_1)\left\{\frac{A}{p_1}, \frac{B}{p_2}\right\}$$

לפי משפט שראינו בהרצאה

2) de morgan :

$(A\wedge B)\vee C$ שקול ל- $(A\vee C)\wedge(B\vee C)$

$(A\vee B)\wedge C$ שקול ל- $(A\wedge C)\vee(B\wedge C)$

שלילה:

$\neg\neg A$ שקול ל- A

$\neg(A\wedge B)$ שקול ל- $(\neg A)\vee(\neg B)$

$\neg(A\vee B)$ שקול ל- $(\neg A)\wedge(\neg B)$

שאלות אלגוריתמיות

בעיית Evaluation

קלט: נוסחה φ וערכים שנותנת ספיקה ρ למשתנים שמופיעים ב-φ

פלט: ערך של φ ב-ρ

φ נוסחה:

$\varphi_1,\varphi_2,\dots,\varphi_k$ תת נוסחאות של φ (בסדר - כל נוסחאות של φ_i מופיעות לפני φ_i)

משפט:

יש אלגוריתם ליניארי לפתרון בעיה זו.

דוגמה:

$(p_1\wedge p_2)\longrightarrow p_1$

שיטות פתרון:

p_1	p_2	$p_1\wedge p_2$	$p_1\wedge p_2\to p_1$

או בטבלת עץ גזירה - עץ גזירה הינו ליניארי באורך הנוסחה.