19/3/2017

לוגיקה למדעי המחשב

מנהלות:

- שם המרצה: אלכסנדר רבינוביץ, RabinoA@post.tau.ac.il
- שם מתרגל: יותם דביר: yotamdvir@mail.tau.ac.il
- שעות קבלה: מרצה: יום ראשון 12-13, מתרגל: יום שני 12
- הגשות: חובת הגשה 80%. ציון סופי: 20% תרגילים, 80% מבחן.

הרצאה #1:

מטרת הלוגיקה:

הסקת מסקנות נכונות.

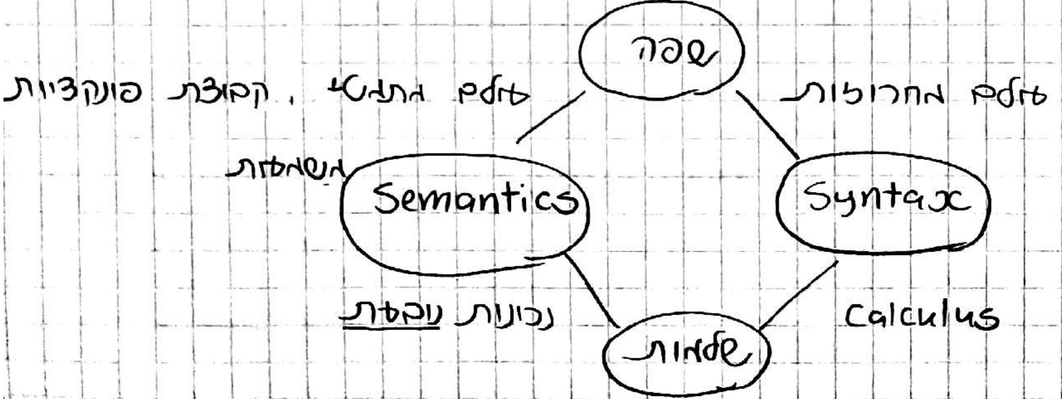
	אותה צורה	
1) אריסטו הוא בן אנוש		1) X הוא חמור
2) כל בן אנוש הוא בן תמותה	$\longleftrightarrow$	2) כל חמור הוא צהוב
לכן (3) אריסטו הוא בן תמותה		לכן (3) X צהוב

שימושים של לוגיקה במתמטיקה:

1) הגדרת טענות
2) Calculus, תחשיב
3) מקצוע מתמטי
4) שימושים של לוגיקה במקצועות אחרים.

לוגיקה למדעי המחשב:

1) בסיס לשפות אופיין
2) שפות שאילתות בבסיסי נתונים
3) אימות תכניות / חומרה
4) בינה מלאכותית.



מבנה הקורס:

1) שפת תחשיב הפסוקים ($\frac{1}{3}$ קורס)

2) שפת לוגיקה: מסדר ראשון, תחשיב יחסים.

קשרים לוגיים בשפות טבעיות

1) היום יום ראשון

2) אני אוהב דג מלוח

היום יום ראשון (ו) אני אוהב דג מלוח

קשר (ו): אם שתי הטענות נכונות גם הטענה המורכבת נכונה

קשר (או): היום יום ראשון (או) אני אוהב דג מלוח

משמעות:

א) הטענה המורכבת נכונה אם לפחות אחד מהמרכיבים נכון

ב) אם בדיוק אחד מהמרכיבים נכון.

שלילה

1) יורד גשם $\leftarrow$ לא יורד גשם

2) הילד אוכל $\leftarrow$ הילד לא אוכל

3) יש לי כסף $\leftarrow$ אין לי כסף

קשר אם... אז...:

1) אפתח חלון

2) נושם אוויר צח

אם נפתח חלון אז נושם אוויר צח

אם Λ שווה ל- 0 אז מכונית תיסע.

קשר אם"ם

אפתח את החלון אם"ם נושם אוויר צח.

אלפאבית

1) משתנים $p_1, p_2, p_3, \ldots$

2) קשרים $\wedge, \vee, \neg, \leftrightarrow, \rightarrow$

3) סימני עזר (,)

Scanned by CamScanner

נוסחאות:

הגדרה:

קבוצת נוסחאות היא אוסף מחרוזות באלפבית של תחשיב הפסוקים הקטן ביותר שמקיים את התכונות הבאות:

1) כל משתנה הוא נוסחה

2) אם φ, ψ נוסחאות אז:

(*) $(\neg\varphi)$, $(\varphi\circ\psi)$ נוסחאות, כאשר $\circ\in\{\wedge,\vee,\rightarrow,\leftrightarrow\}$

דוגמאות לנוסחאות:

$(p_1\rightarrow p_2)$ ✓ $(p_1\rightarrow p_1)$ ✓ $(1\rightarrow$ X $p_2\rightarrow p_7$ X (כי אין סוגריים)

p_9 ✓ (p_4) X $\neg p_1$ X $\neg(p_1)$ X

הוכחה באינדוקציה:

כדי להראות שלכל מספר טבעי יש תכונה P מספיק להראות:

א) **בסיס:** לאפס יש תכונה P

ב) **מעבר אינדוקציה:** אם למספר n יש תכונה P אזי ל- $n+1$ יש תכונה P.

או - אם לכל מספר $m\leq n$ יש תכונה P אז ל- $n+1$ יש תכונה P.

אינדוקציה מבנית של נוסחאות

כדי להראות שלכל נוסחה יש תכונה P מספיק להראות:

א) **בסיס:** לכל משתנה יש תכונה P.

ב) **מעבר אינדוקציה:** אם למחרוזות φ,ψ יש תכונה P אזי ל-(*) יש את תכונה P.

דוגמאות:

טענה: לכל נוסחה יש מספר זוגי של סוגריים

בסיס: לכל משתנה יש 0 סוגריים (p_{17}) ולכן הטענה נכונה.

מעבר: אם ל- φ,ψ מספר זוגי של סוגריים אז ל- $(\varphi\circ\psi)$ מספר זוגי של סוגריים וכן ל- $(\neg\varphi)$

טענה: לכל נוסחה יש מספר סוגריים פותחים כמו סוגריים סוגרים (הוכחה כמו מקודם)

טענה: לכל נוסחה מספר הסוגריים כפול ממספר הקשרים (הוכחה בעזרת אינדוקציה מבנית)

א) אינדוקציה על אורך הנוסחה

ב) אינדוקציה על מספר הקשרים בנוסחה.

Scanned by CamScanner

הגדרה:

סדרת בנייה עבור φ (formation sequence for φ) היא סדרת מחרוזות $\varphi_1,\dots,\varphi_n$ המקיימת:

1) φ_n היא φ

2) עבור כל $i\leq n$ מתקיים אחד המקרים הבאים:

א) φ_i משתנה

ב) יש $j,k<i$ כך ש- $\varphi_i\equiv(\varphi_j\circ\varphi_k)$ או $\varphi_i\equiv(\neg\varphi_j)$, $\circ\in\{\wedge,\vee,\rightarrow,\leftrightarrow\}$

דוגמאות:

סדרת בנייה עבור: $(p_1\rightarrow p_1)$: $(p_1\rightarrow p_1)$ X

$p_1, p_1, p_7, p_1, (p_1\rightarrow p_1)$ ✓

משפט:

למחרוזת יש סדרת בניה $\Longleftrightarrow$ היא נוסחה.

טענה 1:

אם למחרוזת יש סדרת בניה אזי היא נוסחה. (הוכחה באינדוקציה על אורך הסדרה)

הוכחה:

בסיס: אם למחרוזת יש סדרת בניה מאורך 1 אזי היא נוסחה. תהי φ סדרת בניה עבור φ אזי $\varphi\equiv\varphi_1$. אם φ_1 משתנה אז φ נוסחה וברור שהתנאי השני לא יכול להתקיים.

צעד: אם למחרוזת יש סדרת בניה באורך $\leq n$ אזי היא נוסחה אזי אם למחרוזת יש סדרת בניה באורך $n+1$ היא נוסחה.

נניח כי ל-φ יש סדרת בניה $\varphi_1,\dots,\varphi_{n+1}$ אזי נוכיח שהיא נוסחה.

לפי 1) $\varphi_{n+1}\equiv\varphi$. עבור $i=n+1$ מתקיים אחד מהבאים:

א) φ_{n+1} משתנה ואז סיימנו

ב) יש k,j הקטנים מ- $n+1$ כך ש- $\varphi_{n+1}\equiv(\varphi_j\circ\varphi_k)$ $\circ\in\{\wedge,\vee,\rightarrow,\leftrightarrow\}$

מהנחת האינדוקציה כמעט נובע ש- φ_k,φ_j נוסחאות.

שימו לב: $\varphi_1,\varphi_2,\dots,\varphi_j$ היא סדרת בניה עבור φ_j. ולכן φ_{n+1} נוסחה.

Scanned by CamScanner

טענה ב:

לכל נוסחה יש סדרת בניה.

הוכחה (באינדוקציה מבנית):

בסיס: לכל משתנה יש נוסחת בניה. (ברור - סדרת בניה למשתנה x היא x)

צעד האינדוקציה: אם ל- φ, ψ יש סדרות בניה אזי ל- $(\varphi \circ \psi)$ יש סדרת בניה.

$\varphi: \varphi_1, \dots, \varphi_k$, $\psi: \psi_1, \dots, \psi_m$ אזי: $\varphi_1, \dots, \varphi_k, \psi_1, \dots, \psi_m, (\varphi \circ \psi)$ היא

סדרת בניה ל- $(\varphi \circ \psi)$ כאשר $\circ \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$

הגדרה באינדוקציה מבנית:

הגדרה באינדוקציה:

$$\begin{cases} F(0) = 1 \\ F(n+1) = (n+1)F(n) \end{cases}$$

לכל n: יש פתרון יחיד.

$$\begin{cases} G(0) = a \\ G(n+1) = H(n, G(n)) \end{cases} \quad , a \in \mathbb{N} \quad H: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$$

למערכת מהצורה זו יש פתרון יחיד

דוגמאות להגדרה באינדוקציה מבנית:

$Rank($משתנה$) = 1$

$Rank((\varphi \circ \psi)) = 1 + max(Rank(\varphi), Rank(\psi))$

$Rank((\neg\varphi)) = 1 + Rank(\varphi)$

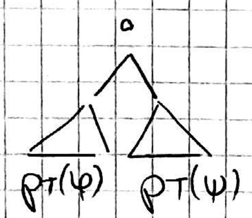
$Rank(((p_1 \wedge p_2) \rightarrow p_2)) = 3$

הגדרה:

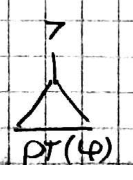
עץ פירוק Parsing Tree : PT : Formulas $\longrightarrow$ Labeled Trees

עבור משתנים: $PT(p_i) := \bullet\, p_i$

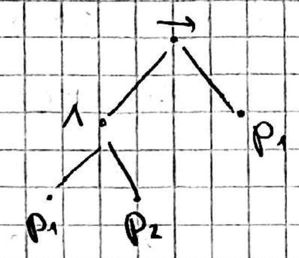
עבור קשרים: $PT((\varphi \circ \psi)) :=$

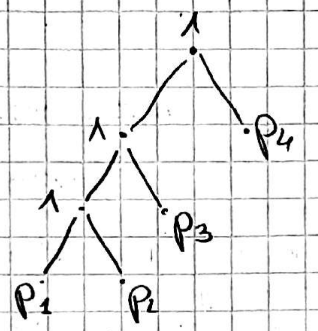


$PT((\neg\varphi)) =$

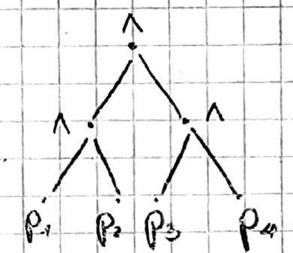


$\varphi = ((p_1 \wedge p_2) \to p_1)$





$\varphi = (((p_1 \wedge p_2) \wedge p_3) \wedge p_4)$



$\varphi = ((p_1 \wedge p_2) \wedge (p_3 \wedge p_4))$