סיכום משפטים והגדרות לינארית 2א

חוגים

הגדרה - **חוג** הוא קבוצה R (Ring) עם 2 פעולות: חיבור $(+)$ וכפל $(\cdot)$
הפעולות מקיימות:
- לכל $a,b\in R$ יש $c\in R$ יחיד כך ש- $a+b=c$
- $(a+b)+c=a+(b+c)$ $\quad \forall a,b,c\in R$
- $b+a=a+b$ $\quad \forall a,b\in R$
- קיים איבר יחיד ב- R שמסומן 0 ומקיים $\forall a\in R.\ a+0=a$
- לכל $a\in R$ קיים איבר נגדי $-a\in R$ המקיים $a-a=0$
- לכל $a,b\in R$ יש $c\in R$ יחיד כך ש- $ab=c$
- $(ab)c=a(bc)$ $\quad \forall a,b,c\in R$
- $a(b+c)=ab+ac$ $\quad \forall a,b,c\in R$
- $(b+c)a=ba+ca$

הגדרה - חוג הוא **חוג עם יחידה** אם יש בו איבר $1\in R$ שמקיים:
$$\forall a\in R.\ 1\cdot a=a=a\cdot 1$$

חוג R הוא **חילופי** אם $\forall a,b\in R.\ ab=ba$

חוג חילופי עם יחידה בו $1\neq 0$ נקרא **תחום שלמות** אם:
$$\forall 0\neq a,b\in R.\ ab\neq 0$$

הגדרה - יהי R חוג. חוג הפולינומים מעל R - $R[x]$ - הוא קבוצת הביטויים הפורמליים מהצורה:
$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i \quad ,\ \forall i.\ a_i\in R \quad ,\ a_i=0 \text{ פרט למספר סופי}$$
חיבור - $\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i+\sum_{i=0}^{\infty} b_i x^i=\sum_{i=0}^{\infty}(a_i+b_i)x^i$

כפל - $\left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i\right)\left(\sum_{j=0}^{\infty} b_j x^j\right)=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{i+j=k} a_i b_j\right)x^k$

הגדרה - יהיו S,R חוגים. העתקה $\varphi:R\to S$ נקראת **הומומורפיזם** של חוגים אם:
$$\forall a,b\in R.\ \varphi(a+b)=\varphi(a)+\varphi(b)\ ,\ \varphi(ab)=\varphi(a)\varphi(b)$$
אם R,S חוגים עם יחידה נדרוש גם $\varphi(1_R)=1_S$

הערות - עבור הומומורפיזם $\varphi:R\to S$ מתקיים: $\varphi(0)=0$, $\forall a\in R.\ \varphi(-a)=-\varphi(a)$
- הומומורפיזם חח"ע ועל נקרא **איזומורפיזם**

טענה - נגדיר העתקת הצבה ל- $\alpha\in R$ - $\varphi:R[x]\to R$ ע"י $f\mapsto f(\alpha)$ (נניח ש- $1\in R$)
- אם α מתחלפת בכפל עם כל המקדמים של g, אז:
$\varphi(f\cdot g)=\varphi(f)\cdot\varphi(g)$
- $\varphi(1)=1$
- אם α מתחלפת עם כל איברי R אז φ הומומורפיזם
- $\varphi(f+g)=\varphi(f)+\varphi(g)$

טענה - יהי R חוג. נגדיר $\varphi:M_n(R)[x]\to M_n(R[x])$ ע"י
$$\varphi\left(\sum_{m=0}^{\infty} A_m x^m\right)_{ij}=\sum_{m=0}^{\infty}(A_m)_{ij}\,x^m \qquad \forall 1\le i,j\le n.$$

הגדרה - יהי R חוג. קבוצה $S\subseteq R$ נקראת **תת חוג** אם $0\in S$ ו- S סגורה לחיבור, כפל, ולקיחת נגדי.

טענה - S היא חוג ביחס לחיבור והכפל של R.

משפט - יהי R תחום שלמות. אז R תת חוג של שדה כלשהו $\mathbb{F}$

חילוק החוגים

הגדרה - יהי R חוג עם יחידה, $a\in R$. $b\in R$ נקרא **הופכי** של a אם $ab=1=ba$
נסמן את קבוצת האיברים ההפיכים ב-R:
$R^* = \{a\in R \mid \text{יש הפכי ל-}a\}$

משפט - יהי F שדה, ו- $R=F[x]$
יהי $\{q_i\}_{i\in I}$ אוסף כל הפולינומים האי-פריקים המתוקנים ב- R.
אז לכל $0\neq f\in R$ יש $c\in R^*=F^*$ ולכל $i\in I$ יש $m_i\in\mathbb{N}\cup\{0\}$
ולמעט מספר סופי של i, $m_i=0$, יחידים כך ש:
$f=c\cdot\prod_{i\in I} q_i^{m_i}$

* באופן דומה יש פירוק יחיד לגורמים אי פריקים ב- $R=\mathbb{Z}$

משפט - יהי $f\in\mathbb{R}[x]$ מתוקן. אז f אי פריק אמ"מ מתקיים אחד מהן
א - $f=x-a$, $a\in\mathbb{R}$
ב - $f=x^2+bx+c$ כאשר $b,c\in\mathbb{R}$ כך ש- $b^2-4ac<0$

הלמה של גאוס - אם $f\in\mathbb{Z}[x]$ מתוקן ויש $h,g\in\mathbb{Q}[x]$ מתוקנים כך ש- $f=g\cdot h$
אז $h,g\in\mathbb{Z}[x]$

מסקנה - יהי $f\in\mathbb{Z}[x]$ מתוקן. יהי $\alpha\in\mathbb{Q}$ שורשו. אז $\alpha\in\mathbb{Z}$

הגדרה - יהי F שדה, ויהיו $f_1,\dots,f_k\in F[x]$ לא כולם אפסים.
אז פולינום מתוקן $d\in F[x]$ יקרא **מחלק משותף** של $f_1,\dots,f_k$ אם $d|f_1,\dots,d|f_k$
- מחלק משותף d של $f_1,\dots,f_k$ יקרא המחלק המשותף הגדול ביותר ויסומן $gcd(f_1,\dots,f_k)$
אם הוא מתחלק בכל מחלק משותף של $f_1,\dots,f_k$, כלומר:
לכל d' מתוקן שמקיים $d'|f_1,\dots,f_k$ מתקיים $d'|d$

משפט - חילוק עם שארית
יהי R חוג עם יחידה ויהיו $f,g\in R[x]$
$g=b_m x^m+\dots+b_0$, $b_m\in R^*$
אזי:
א - קיימים $q,r\in R[x]$ יחידים:
$f=gq+r$
$\deg r<\deg g=m$

ב - קיימים $q',r'\in R[x]$ יחידים:
$f=q'g+r'$
$\deg r'<\deg g=m$

מסקנה - יהי R חוג עם יחידה, יהי $\alpha\in R$ ויהי $f\in R[x]$
אז $f(\alpha)=0$ אמ"מ קיים $q\in R[x]$ כך ש- $f=q(x)\cdot(x-\alpha)$

הגדרה - יהי R חוג קומוטטיבי ויהיו $a,b\in R$. a מחלק את b ב- R $(a|b)$
אם יש $c\in R$ כך ש- $b=ac$

מסקנה - יהי F שדה, יהי $\alpha\in F$, ויהי $f\in F[x]$
אזי α שורש של f אמ"מ $x-\alpha|f$ ב- $F[x]$

משפט - יהי F שדה ויהי $0\neq f\in F[x]$ ממעלה n. אז ל- f לכל היותר n שורשים.

מסקנה - יהי F שדה, יהי $f\in F[x]$ ממעלה $n\geq 0$, ויהי $c\in F^*$ המקדם העליון של f.
נניח כי ל- f יש n שורשים שונים $\alpha_1,\dots,\alpha_n$ ב- F
אזי $f=c(x-\alpha_1)\dots(x-\alpha_n)$

הגדרה - פולינום ממעלה ראשונה נקרא **פולינום לינארי**

הגדרה - שדה F נקרא **סגור אלגברית** אם לכל $f\in F[x]$ ממעלה >0 יש שורש (לפחות אחד) ב- F.

משפט - לכל שדה F קיים שדה סגור לינארית כך ש- F שדה חלקי שלו

משפט - יהי F שדה סגור אלגברית ויהי $f\in F[x]$ ממעלה $n\geq 0$.
אז קיימים $\alpha_1\ldots\alpha_n\in F$ (לאו דווקא שונים) וקיים $c\in F^*$ כך ש:
$f=c(x-\alpha_1)\ldots(x-\alpha_n)$

פריקות בחוגי הפולינומים

הגדרה - יהי R חוג עם יחידה. קבוצה $I\subseteq R$ נקראת **אידיאל** של R אם:
1) $0\in I$
2) אם $a,b\in I$ אז $a+b\in I$
3) אם $a\in I$ ו- $r\in R$ אז $ar,ra\in I$

* אם $a\in I$ אז $-a=(-1)a\in I$

הגדרה - **אידיאל ראשי** - $(a)=\{ra\mid r\in R\}=\{b\in R\mid ab\}$
(R קומוטטיבי עם יחידה, $a\in R$)

משפט - יהי F שדה. אז כל אידיאל ב- $R=F[x]$ הוא ראשי.
יתר על כן: אם $I\neq\{0\}$ אידיאל ב- R אז:
א) קיים $g\in F[x]$ מתוקן יחיד כך ש- $I=(g)$
ב) g הוא הפולינום המתוקן היחיד ב- I ממעלה $m=\min(\deg h\mid 0\neq h\in I)$

הגדרה - יהי R תחום שלמות. יהי $q\in R$, $q\neq 0$, $q\notin R^*$
א) q נקרא **אי פריק** אם לכל $a,b\in R$ מתקיים $q=ab\leftarrow a\in R^*$ או $b\in R^*$
ב) q נקרא **ראשוני** אם לכל $a,b\in R$ מתקיים:
$q|ab\leftarrow q|a$ או $q|b$

משפט - R תחום שלמות בו כל אידיאל ראשי.
יהי $q\in R$ אי פריק. אז q ראשוני.

* **חסרים כמה משפטים** . . . . מופיעים בסוף הקובץ

הגדרה - F שדה, $f_1\ldots f_k\in F[x]$ לא כולם 0.
$d\in F[x]$ מתוקן נקרא **מחלק משותף** של $f_1\ldots f_k$ אם $d|f_1,\ldots,f_k$
מחלק משותף d של $f_1\ldots f_k$ נקרא גדול ביותר אם $d'|d$ לכל מחלק משותף אחר d'
סימון - $\gcd(f_1\ldots f_k)=d$

הערה - יהי $f_1,f_2\in F[x]$ שונים מ- 0. $f_1=c_1\prod_{i\in I}q_i^{m_i}$, $f_2=c_2\prod_{i\in I}q_i^{n_i}$
אז $\gcd(f_1,f_2)=\prod_{i\in I}q_i^{\min(m_i,n_i)}$

האלגוריתם של אוקלידס למציאת $\gcd(f_1,f_2)$
נבצע סדרת חילוקים עם שארית:

$$f_1=f_2q_1+f_3 \qquad \deg f_3<\deg f_2$$
$$f_2=f_3q_2+f_4$$
$$f_3=f_4q_3+f_5$$
$$\vdots$$
$$f_{r-2}=f_{r-1}q_{r-2}+f_r \qquad \deg f_r<\deg f_{r-1}$$
$$f_{r-1}=f_rq_{r-1}+0 \qquad f_{r+1}=0$$

$\leftarrow$ r האינדקס הראשון בו זה קורה.

נובע ש- $d|f_1,f_2 \longleftrightarrow d|f_r$
כלומר $f_r=\gcd(f_1,f_2)$

למה - יהיו $f_1, f_2 \in F[x]$ לא שניהם 0. יהי $d = \gcd(f_1, f_2)$
אז קיימים $g, h \in F[x]$ כך ש- $d = gf_1 + hf_2$
הערה - הם לא יחידים!
איך? מציבים חזרה באלגוריתם אוקלידס.

הגדרה - יהי F שדה, $f_1 \dots f_k \in F[x]$ שונים מ-0. פולינום מתוקן $m \in F[x]$ יקרא
כפולה משותפת של $f_1 \dots f_k$ אם $f_1 | m \dots f_k | m$
כפולה משותפת m תקרא קטנה ביותר ותסומן $m = \operatorname{lcm}(f_1 \dots f_k)$
אם היא מחלקת כל כפולה אחרת m': $m | m'$

אם $f_1 = c_1 \prod_{i \in I} q_i^{m_i}$, $f_2 = c_2 \prod_{i \in I} q_i^{n_i}$
אז $\operatorname{lcm}(f_1, f_2) = \prod_{i \in I} q_i^{\max(n_i, m_i)}$

הערה - אם $d = \gcd(f_1, f_2)$, $m = \operatorname{lcm}(f_1, f_2)$
אז $dm = f_1 \cdot f_2$

וקטורים עצמיים וערכים עצמיים

הגדרה - יהי V מרחב וקטורי מעל שדה F.
תהי $T: V \to V$ ט"ל. יהי $\lambda \in F$ סקלר.
הקבוצה $V_\lambda := \{ v \in V \mid T(v) = \lambda v \}$
נקראת המרחב העצמי של T השייך ל-λ
וקטור $v \in V$ נקרא וקטור עצמי של T השייך ל-λ
אם $v \in V_\lambda$, כלומר אם $T(v) = \lambda v$
λ ייקרא ערך עצמי של T אם $V_\lambda \neq \{0\}$
כלומר אם קיים וקטור עצמי של T $v \neq 0$ השייך ל-λ

הגדרה - יהי F שדה. תהי $A \in M_n(F)$, ויהי $\lambda \in F$
אז $V_\lambda = \{ v \in F^n \mid Av = \lambda v \}$
הוא המרחב העצמי של A השייך ל-λ
$v \in F^n$ הוא וקטור עצמי של A השייך ל-λ אם $v \in V_\lambda$, כלומר אם $Av = \lambda v$
λ הוא ערך עצמי של A אם יש $v \neq 0$ כך ש- $Av = \lambda v$, כלומר, $V_\lambda \neq \{0\}$

למה - יהי V מ"ו מעל F, תהי $T: V \to V$ ט"ל, $B = (v_1 \dots v_n)$ בסיס סדור של V.
תהי $A = [T]_B^B = [T]_B$, יהי $\lambda \in F$. אז:
א - $v \in V$ הוא ו"ע של T השייך ל-λ $\leftrightarrow$
$[v]_B \in F^n$ הוא ו"ע של A השייך ל-λ
ב - λ הוא ע"ע של T $\leftrightarrow$ λ ע"ע של A

משפט - א - יהי V מ"ו מעל שדה F. תהי $T: V \to V$ ט"ל. יהי $\lambda \in F$.
אז $V_\lambda = \operatorname{Ker}(T - \lambda 1_V)$
בפרט V_λ תת מרחב של V. לכן λ ע"ע של T $\leftrightarrow$ $T - \lambda 1_V$ אינה חח"ע
ב - יהי F שדה. $A \in M_n(F)$, $\lambda \in F$. אז V_λ הוא מרחב הפתרונות
של המערכת ההומוגנית $(A - \lambda I_n) X = 0$.
לכן λ ע"ע של A $\leftrightarrow$ $\det(A - \lambda I_n) = 0$

משפט - יהי V מ"ו מעל שדה F. יהי $B = (v_1, \dots v_n)$ בסיס סדור של V.
תהי $T: V \to V$ ט"ל.
אז $[T]_B^B = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix}$ $\leftrightarrow$ לכל $1 \le j \le n$ v_j ו"ע של T השייך ל-λ_j
ואז $\lambda_{1 \dots n}$ הם ע"ע של T.

מסקנה - לט"ל $T: V \to V$ יש הצגה אלכסונית $\leftrightarrow$ ל-V יש בסיס שמורכב מוקטורים עצמאיים של T.

מסקנה - יהי F שדה ותהי $A\in M_n(F)$. אם יש $P\in M_n(F)$ הפיכה כך ש: $P^{-1}AP=\begin{bmatrix}\lambda_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n\end{bmatrix}$, אז העמודות $v_1\dots v_n$ של P הן בסיס של F^n שמורכב מוקטורים עצמיים של A, כאשר v_j ו"ע של A השייך ל- λ_j.
להיפך אם יש בסיס כזה של F^n ונגדיר $P=(v_1,\dots v_n)\in M_n(F)$
אז P הפיכה ו- $P^{-1}AP=\begin{bmatrix}\lambda_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n\end{bmatrix}$

משפט - יהי V מ"ו, $T:V\to V$ ט"ל, $v_1\dots v_m$ ו"ע של T שונים מ-0 השייכים לע"ע $\lambda_1\dots\lambda_m$ השונים זה מזה.
אז $v_1\dots v_m$ בת"ל.

מסקנה - V מ"ו מעל F, $T:V\to V$ לינארית, $\lambda_1,\dots,\lambda_m\in F$ ע"ע של T שונים.
לכל $1\le i\le m$ תהי $v_{i1},\dots,v_{ik_i}$ סדרה של וקטורים בת"ל ב- V_{λ_i}
אז הסדרה $v_{11}\dots v_{1k_1},v_{21}\dots v_{2k_2},\dots,v_{m1}\dots v_{mk_m}$ בת"ל.

פולינום אופייני

ראינו λ ע"ע של A $\leftrightarrow$ $\det(A-\lambda I_n)=0$. נסמן $F_A(x)=\det(A-xI_n)$, $F_A(\lambda)=0$
עבור מטריצה $C=(g_{ij}(x))\in M_n(F[x])$ ועבור $\lambda\in F$ נגדיר:
$C(\lambda)=(g_{ij}(\lambda))\in M_n(F)$

למה - יהי F שדה, ותהי $C=(g_{ij}(x))\in M_n(F[x])$.
אז א - $\det(C)\in F[x]$ (יש כזה C, רק ש- $F[x]\subseteq L$, ויש מטריצות ב- $\det(C)\in M_n(L)$)
ב - $\deg\det(C)\le d_1+\dots+d_n$ כאשר $d_i=\max_{1\le j\le n}\deg g_{ij}$
ג - $(\det C)(\lambda)=\det C(\lambda)$ לכל $\lambda\in F$

הגדרה - תהי $A\in M_n(F)$. אז המטריצה:
$$xI_n-A=\begin{bmatrix}x-a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n}\\ -a_{21} & x-a_{22} & \cdots & -a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & x-a_{nn}\end{bmatrix}\in M_n(F[x])$$
תקרא המטריצה האופיינית של A,
וגם
$$f_A(x)=\det(xI_n-A)\in F[x]$$
יקרא הפולינום האופייני של A.

למה - תהי $A=(a_{ij})\in M_n(F)$
אז
$$f_A(x)=c_nx^n+c_{n-1}x^{n-1}+\dots+c_0$$
כאשר:
1) $c_n=1$ ($f_A(x)$ מתוקנת ממעלה n)
2) $c_{n-1}=-trA=-(a_{11}+a_{22}+\dots+a_{nn})$
3) $c_0=(-1)^n\det A$

משפט - תהי $A\in M_n(F)$, ויהי $\lambda\in F$.
אז λ ע"ע של A $\longleftrightarrow$ $f_A(\lambda)=0$

מסקנה - אם $f_A(x)=(x-\lambda_1)\dots(x-\lambda_n)$ כאשר $\lambda_1\dots\lambda_n\in F$ שונים,
אז A דומה למטריצה אלכסונית.

משפט - למטריצות דומות אותו פולינום אופייני

הגדרה - הצבת מטריצה בפולינום
אם $A \in M_n(F)$ ו- $g = \sum_{i=0}^{\infty} a_i A^i \in M_n(F)$
נגדיר
$$g(A) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i A^i \in M_n(F)$$

משפט - תהי $A \in M_n(F)$. אז $f_A(A)=0$ (קיילי - המילטון)

מסקנה - תהי $A \in M_n(F)$. קיים פולינום $0 \neq f \in F[x]$ ממעלה $\leq n$
כך ש- $f(A)=0$

הגדרה - הפולינום האופייני $f_T \in F[x]$ של T הוא הפולינום האופייני של $[T]_B^B$
כאשר B בסיס סדור של V.

הגדרה - הצבת העתקה בפולינום
עבור כל $g(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i \in F[x]$ נגדיר:
$$g(T) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i T^i : V \to V$$

טענה - יהי B בסיס סדור של V. אז $[g(T)]_B^B = g([T]_B^B)$

משפט - קיילי המילטון להעתקות: $f_T(T)=0$

פולינום מצערי

יהי F שדה ו- $A \in M_n(F)$.
אז $I = \{f \in F[x] \mid f(A)=0\}$ הוא אידיאל ב- $F[x]$
$I \neq \{0\}$, לכן I ראשי ויש לו יוצר מתוקן יחיד ממעלה $\min\{\deg h \mid 0 \neq h \in I\}$

הגדרה - תהי $A \in M_n(F)$. פולינום $M_A(x) \in F[x]$ ייקרא הפולינום המצערי של A
אם הוא מתוקן ו- $(m_A) = \{f \in F[x] \mid f(A)=0\}$
כלומר: m_A מתוקן, $m_A(A)=0$, והוא מהמעלה המצערית מבין
כל הפולינומים שמאפסים את A ושונים מ-0.

משפט - לכל $f \in F[x]$ מתקיים: $f(A)=0 \leftrightarrow m_A \mid f$ (בפרט $m_A \mid f_A$)

הערות - $\deg M_A \geq 1$
- $A = \lambda I_n \leftrightarrow M_A = x - \lambda$

משפט - תהי $A \in M_n(F)$. אז $f_A \mid M_A^n$ ב- $F[x]$

משפט - תהי $A \in M_n(F)$. אז ל- f_A ול- m_A אותם גורמים אי פריקים
מתוקנים מעל $F[x]$.
כלומר אם
$f_A = q_1^{k_1} \cdot \ldots \cdot q_r^{k_r}$
כאשר $q_i \in F[x]$ אי פריקים מתוקנים שונים
אז
$m_A = q_1^{l_1} \cdot \ldots \cdot q_r^{l_r}$
כאשר $\forall i.\ 1 \leq l_i \leq k_i$

מסקנה - תהי $A \in M_n(F)$. יהי $\lambda \in F$. אז λ ע"ע אמ"מ $m_A(\lambda)=0$

משפט - תהי $M = \begin{bmatrix} A_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & A_n \end{bmatrix}$ $A_1 \ldots A_n$ ריבועיות

נסמן $h = lcm(m_{A_1}, \ldots m_{A_n})$

אז:

א- $h | m_M$

ב- אם $*=0$ אז $h = m_M$

משפט - למטריצות דומות אותו פולינום מזערי

תרגיל שימושי - אם $A \in M_n(F)$ בעלת רכיבים שונים מאפס באלכסון הראשון מתחת לראשי, ומתחתיו רק 0, אז $\deg m_A = n$ ולכן $m_A = f_A$

יהי V מ"ו מעל F, ו- $T: V \to V$ לינארית.

הגדרה - פולינום $m(x) \in F[x]$ "קרוי" הפולינום המזערי של T
אם $m(T)=0$ ו-m הוא מתוקן בעל המעלה המזערית מבין כל הפולינומים
השונים מ-0 שמאפסים את T.
זהו היוצר המתוקן היחיד של האידיאל $I = \{f \in F[x] \mid f(T) = 0\}$

משפט - א- אם $V=\{0\}$ אז $m_T = 1$

ב- אם $V \neq \{0\}$, יהי B בסיס של V.

תהי $C = [T]_B^B$. אז $m_T = m_C$

ריבוים של ערכים עצמיים ושילוש

הגדרה - יהי $\lambda \in F$ ע"ע של T.
הריבוי האלגברי של λ הוא המעריך k עמו מופיע $(x-\lambda)$ בפירוק של f_T
הריבוי הגיאומטרי של λ הוא המימד של $V_\lambda = \{v \in V \mid T(v) = \lambda v\}$.

למה - הריבוי הגיאומטרי של λ קטן או שווה לריבוי האלגברי של λ.

משפט - לה"ע $T: V \to V$ יש הצגה אלכסונית $\longleftrightarrow$
f_T מכפלה של גורמים ממעלה אחת ב-$F[x]$ ולכל ע"ע של T הריבוי האלגברי שווה לגיאומטרי

הגדרה - מטריצה $A \in M_n F$ נקראת משולשית (עליונה) אם $(A)_{ij}=0$ לכל $j<i$.

משפט - תהי $A \in M_n(F)$ ויהיו $\lambda_1, \ldots \lambda_n \in F$
אז יש מטריצה משולשית עליונה ש-A דומה לה $\longleftrightarrow$
$f_A(x) = (x-\lambda_1)\ldots(x-\lambda_n)$

מסקנה - אם F שדה סגור אלגברית, אז כל $A \in M_n(F)$ דומה למשולשית

מסקנה - יהי V מ"ו ממימד n מעל שדה F תהי $T: V \to V$ ט"ל ויהיו $\lambda_1 \ldots \lambda_n \in F$
אז קיים בסיס B של V כך ש-$[T]_B^B$ משולשית עם אלכסון ראשי $(\lambda_1 \ldots \lambda_n)$
$\longleftrightarrow f_T = (x-\lambda_1)\ldots(x-\lambda_n)$.

הפירוק הפרימרי

הגדרה - תת מרחב $W \subseteq V$ נקרא **שמור-T** אם $T(W) \subseteq W$, כלומר אם $T(w) \in W$ לכל $w \in W$.
במקרה כזה **הצמצום של T ל-W**, כלומר $T': W \to W$, ו-$T'(w) = T(w)$
היא העתקה לינארית, והיא תסומן $T|_W$.

דוגמה - אם λ ע"ע של T ו-$W \subseteq V_\lambda$ אז W הוא שמור-T

תרגיל - תהיינה $S, T: V \to V$ ט"ל ק"ש $ST = TS$
א - $Ker(S), Im(S)$ הם שמורי-T
ב - אם $W \subseteq V$ שמור-T אז גם $S(W)$ שמור-T
ג - אם $W_1, W_2 \subseteq V$ שמורי-T אז גם $W_1 \cap W_2$ ו-$W_1 + W_2$ שמורי-T
ד - נניח ש-T אינו'. אם $W \subseteq V$ תת מרחב שמור-T ו-$\dim W < \infty$ אז W שמור T^{-1}

מסקנה - יהי $f \in F[x]$. אז $Im f(T)$, $Ker f(T)$ שמורי-T

הגדרה - יהי V מ"ו ויהיו $W_1 \dots W_s \subseteq V$ תת מרחבים שלו.
נאמר ש-V הוא **הסכום הישר** של $W_1 \dots W_s$
ונכתוב $V = W_1 \oplus \dots \oplus W_n$
אם לכל $v \in V$ יש הצגה יחידה מהצורה $v = w_1 + \dots + w_s$, $\forall i.\, w_i \in W_i$

משפט - יהי V מ"ו ויהיו $W_1 \dots W_s$ תת מרחבים שלו.
לכל $1 \le i \le s$ יהי $B_i = (w_{i_1}, \dots, w_{i n_i})$ בסיס סדור של W_i
אזי $V = W_1 \oplus \dots \oplus W_s \longleftrightarrow B = \bigcup B_i$ בסיס של V.

משפט - נניח כי $V = W_1 \oplus \dots \oplus W_s$, ונסמן לכל $1 \le i \le s$ $B_i = (w_{i_1} \dots w_{i n_i})$ בסיס של W_i,
כך ש-$B = \bigcup B_i$ בסיס של V.
א - נרשום את $[T]_B^B$ כמטריצת גושים, $[T]_B^B = A_{ij}$, כאשר $A_{ij} \in M_{n_i \times n_j}(F)$
נקבע $1 \le j \le s$. אז W_j שמור-T $\longleftrightarrow$ $A_{ij} = 0$ לכל $i \neq j$
אם תנאים שקולים אלה מתקיימים, אז $A_{jj} = [T|_{W_j}]_{B_j}^{B_j}$

ב - $W_1 \dots W_s$ שמורי-T $\longleftrightarrow$ $[T]_B^B = \begin{bmatrix} A_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A_s \end{bmatrix}$, $A_j \in M_{n_j}(F)$ לכל $1 \le j \le s$

ג - אם התנאים השקולים ב-ב מתקיימים, אז $A_j = [T|_{W_j}]_{B_j}^{B_j}$ לכל $1 \le j \le s$

מסקנה - נניח כי $V = W_1 \oplus \dots \oplus W_s$, כאשר $W_1 \dots W_s$ שמורי-T.
נסמן $T_i = T|_{W_i}$ לכל $1 \le i \le s$. אז:
$$f_T(x) = f_{T_1}(x) \cdot \ldots \cdot f_{T_s}(x)$$
$$m_T(x) = lcm(m_{T_1}(x) \dots m_{T_s}(x))$$

למה - יהי $W \subseteq V$ תת מרחב שמור-T. יהי $S = T|_W : W \to W$ הצמצום של T ל-W. אזי:
א) יהי $f \in F[x]$. לכל $w \in W$ מתקיים $f(S)(w) = f(T)(w)$, כלומר $f(T|_W) = f(T)|_W$
ב) $m_S | m_T$
ג) $f_S | f_T$

משפט - יהי V מ"ו מעל שדה F ותהי $T: V \to V$ ט"ל. יהיו $g, h \in F[x]$ זרים
כך ש-$(gh)(T) = 0$. אז $V = Ker\, g(T) \oplus Ker\, h(T)$

מסקנה - יהיו $g, h \in F[x]$ מתוקנים זרים כך ש-$m_T = gh$.
נסמן ב-T_1, T_2 את הצמצומים של T ל-$Ker\, h(T)$, $Ker\, g(T)$
אז $h = m_{T_2}$, $g = m_{T_1}$

משפט הפירוק הפרימרי - יהי V מ"ו מעל שדה F ותהי $T:V\to V$ ט"ל
כך ש- $m_T = g_1\cdots g_s$ ($g_1,\dots,g_s$ מתוקנים וזרים)
נסמן $W_i = \ker g_i(T)$. אזי:

א - $V = W_1\oplus\cdots\oplus W_s$ כאשר $W_1,\dots,W_s$ שמורי-T
ב - $m_{T|_{W_i}} = g_i$ לכל i.

* השימוש העיקרי של המשפט: אם $m_T = q_1^{r_1}\cdots q_s^{r_s}$ כאשר q_i אי פריק מתוקן,
נקח $g_i = q_i^{r_i}$, ונקבל $g_1,\dots,g_s$ זרים.

מסקנה - מטריצה לפי פירוק פרימרי
יהי V מ"ו מעל שדה F ותהי $T:V\to V$ ט"ל.
נניח כי $m_T = q_1^{r_1}\cdots q_s^{r_s}$ ($q_1,\dots,q_s$ אי-פריקים מתוקנים ו- $r_1,\dots,r_s\geq 1$)
נסמן $W_i = \ker q_i^{r_i}(T)$ לכל i. אזי:
א - צירוף B של בסיסים $B_1,\dots,B_s$ של $W_1,\dots,W_s$ הוא בסיס של V
המקיים $[T]_B^B = \mathrm{Diag}(A_1,\dots,A_t)$ כאשר $A_i = [T|_{W_i}]_{B_i}^{B_i}$,
ו- $m_{A_i} = q_i^{r_i}$ לכל i.
ב - יהי B בסיס של V כך ש- $[T]_B^B = \mathrm{Diag}(A_1,\dots,A_t)$ כאשר
m_{A_i} חזקות של פולינומים אי פריקים שונים.
נניח כי $A_i\in M_{n_i}(F)$ לכל i. נכתוב את B כצירוף של סדרות
$B_1,\dots,B_t$ כאשר $|B_i| = n_i$ לכל i, אז כדי הסדר:
B_i בסיס של W_i, $[T|_{W_i}]_{B_i}^{B_i} = A_i$, $m_{A_i} = q_i^{r_i}$

משפט - יהי V מ"ו מעל שדה F ותהי $T:V\to V$ ט"ל.
אזי יש בסיס V כך ש- $[T]_B^B$ אלכסונית $\longleftrightarrow$
$m_T = (x-\mu_1)\cdots(x-\mu_s)$, כאשר $\mu_1,\dots,\mu_s$ שונים זה מזה.

מסקנה - $A\in M_n(F)$ דומה למטריצה אלכסונית $\longleftrightarrow$
$m_A = (x-\mu_1)\cdots(x-\mu_s)$ כאשר $\mu_1,\dots,\mu_s\in F$ שונים זה מזה.

צורת ג'ורדן

V מ"ו מעל F בעל מימד סופי, $T:V\to V$

הגדרה - המטריצה $\begin{bmatrix}\lambda & & 0\\ 1 & \ddots & \\ 0 & 1 & \lambda\end{bmatrix}\in M_n(F)$ נקראת גוש ג'ורדן של λ מסדר n ותסומן $J_n(\lambda)$

מטריצה מהצורה $J(\lambda) = \begin{bmatrix}J_{n_1}(\lambda) & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & J_{n_t}(\lambda)\end{bmatrix}$, כאשר $n_1\geq n_2\geq\dots\geq n_t\geq 1$
נקראת מערך ג'ורדן של λ, והמספר n_1 הוא אינדקס המערך.

מטריצת ג'ורדן היא מהצורה $J = \begin{bmatrix}J(\lambda_1) & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & J(\lambda_t)\end{bmatrix}$, כאשר $\lambda_1,\dots,\lambda_t\in F$ שונים
ולכל $1\leq i\leq t$, $J(\lambda_i)$ מערך ג'ורדן של λ_i.

משפט - צורת ג'ורדן של T
נניח $m_T = (x-\lambda_1)^{r_1}\cdots(x-\lambda_s)^{r_s}$ כאשר $\lambda_1,\dots,\lambda_s\in F$ שונים ו- $r_i\geq 1\ \forall i$.
א. קיימת מטריצת ג'ורדן יחידה J עבורה יש בסיס B של V כך ש:
$[T]_B^B = J$
ב- J יש s מערכי ג'ורדן, כאשר המערך ה-i שייך ל-λ_i ובעל אינדקס r_i.

מסקנה - תהי $A\in M_n(F)$, ונניח $m_A = (x-\lambda_1)^{r_1}\cdots(x-\lambda_s)^{r_s}$ כמו קודם.
אז קיימת מטריצת ג'ורדן יחידה J דומה ל-A, שמאפייניה כמו קודם.

הערה - כיצד נעלה בחזקה מטריצת ז'ורדן?

נבין איך מעלים בחזקה גוש ז'ורדן -

$$J_n(\lambda)^k=\begin{bmatrix} \lambda^k & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \binom{k}{1}\lambda^{k-1} & \lambda^k & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \binom{k}{n-2}\lambda^{k-(n-2)} & & \ddots & \lambda^k & 0 \\ \binom{k}{n-1}\lambda^{k-(n-1)} & \binom{k}{n-2}\lambda^{k-(n-2)} & \cdots & \binom{k}{1}\lambda^{k-1} & \lambda^k \end{bmatrix}$$

* עבור $k<j$, $\binom{k}{j}=0$

מטריצת ז'ורדן J היא מטריצת גושים אלכסונית, כאשר כל גוש הוא $J_n(\lambda)$
אז J^k היא מטריצת גושים באלכסון, כשכל גוש מהצורה $J_n(\lambda)^k$.

תהי $A\in M_n(F)$ ונניח שאנו יודעים למצוא P הפיכה כך ש- $A=P^{-1}JP$
אז- $A^k=P^{-1}J^kP$.

מסקנה - תהי J מטריצת ז'ורדן, יהי $\lambda\in F$ ויהי $k\geq 0$ שלם.

א - $\text{rank}\, J_n(0)^k=\begin{cases} n-k, & k\leq n \\ 0, & k>n \end{cases}$

ב - אם $\lambda\neq 0$ אז $\text{rank}\, J_n(\lambda)^k=n$

ג - $\text{rank}\,(J-\lambda I)^{k-1}-\text{rank}\,(J-\lambda I)^k$
הוא מספר גושי ז'ורדן ב- J השייכים ל- λ והינם מסדר $\geq k$

מסקנה - אם B בסיס של V כך ש- $J=[T]_B^B$ מטריצת ז'ורדן
אז מספר גושי ז'ורדן $J_k(\lambda)$ של J הוא:
$$\text{rank}\,(T-\lambda\cdot 1_V)^{k-1}-2\,\text{rank}\,(T-\lambda\cdot 1_V)^k+\text{rank}\,(T-\lambda\cdot 1_V)^{k+1}$$
בפרט, J יחידה עד כדי סדר מערכיה

מסקנה - א - $m_{J_n(\lambda)}=(x-\lambda)^n$

ב - נניח שמערכי J שייכים ל- $\lambda_1,\dots,\lambda_s\in F$ שונים ובגדלי אינדקסים $r_1\dots r_s$.
אז $m_J=(x-\lambda_1)^{r_1}\cdots(x-\lambda_s)^{r_s}$

ג - נניח ש- $m_J=(x-\lambda_1)^{r_1}\cdots(x-\lambda_s)^{r_s}$ כאשר $\lambda_1,\dots,\lambda_s\in F$
שונים ו- $r_1\dots r_s\geq 1$. אז מערכי J השייכים ל- $\lambda_1\dots\lambda_s$
הם בגדלי אינדקסים $r_1\dots r_s$ בהתאמה.

* תהי $N:V\to V$ ט"ל (במקום T) מעלה.

הגדרה - סדרה $v=v_1,\dots,v_k\in V$ נקראת שרשרת ז'ורדן (של N) באורך k אם:
$N(v_1)=v_2\, , N(v_2)=v_3\, \dots\, N(v_{k-1})=v_k\, , N(v_k)=0$
או - הסדרה היא:
$v, N(v), N^2(v)\dots N^{k-1}(v)=(N^j(v))_{j=0}^{k-1}$, $v\in \text{Ker}\, N^k$

תרגיל - $[N]_B^B=J_k(0)$ מערך ז'ורדן של 0 $\leftrightarrow$ B שרשרת ז'ורדן מאורך k.
- $[N]_B^B$ מערך ז'ורדן של 0 $\leftrightarrow$ B איחוד של שרשראות ז'ורדן שסדרת אורכיהם אינה עולה*

משפט - נניח $N^r=0$, ו- $r\geq 1$. אז קיים בסיס B של V כך ש- $[N]_B^B$ מערך ז'ורדן של 0.

* כלומר - $B=\bigvee_{k=1}^{r}\bigvee_{v\in A_k}(N^j(v))_{j=0}^{r-k}$, $A_k\subseteq \text{Ker}\, N^{r+1-k}$

בניה - נרצה עבור $N:V\to V$ כך ש- $N^r=0$ לבנות בסיס B של V כך ש: $[N]_B^B$ מערך ג'ורדן של 0.

נניח $m_N = x^r$.

נשתמש בסדרה של העתקות (שמצמצמות את N):

$$V=N^0(V)\longrightarrow N(V)\longrightarrow N^2(V)\longrightarrow \dots \longrightarrow N^{r-2}(V)\longrightarrow N^{r-1}(V)\longrightarrow N^r(V)=\{0\}$$

סימון - עבור $A_k\subseteq V$ נסמן $N^{r-k}(A_k)$ אם $A_k\subseteq N^{r-k}(V)$

1) נמצא $A_1\subseteq V$ כך ש- $N^{r-1}(A_1)$ בסיס של $N^{r-1}(V)$.
אז A_1 בסיס של $V/\ker N^{r-1}$.

2) יהי $N'=N|_{N^{r-2}(V)}$. אז $(N^{r-2})^{-1}(\ker N')=\ker N^{r-1}$
נשלים את $N^{r-1}(A_1)=N^{r-2}(N(A_1))$ לבסיס של $\ker N'$ ע"י $N^{r-2}(A_2)$ כלשהו.
זה שקול ל- $N(A_1)\cup A_2$ בסיס של $\ker N^{r-1}/\ker N^{r-2}$.

3) נמשיך כך עד הסוף.
לבסוף נקבל ש- $B=\bigcup_{k=1}^{r}\bigcup_{v\in A_k}\left(N^j(v)\right)_{j=0}^{r-k}$ הבסיס המבוקש של V.

תרגיל - תהי J צורת ג'ורדן של T. אז מספר גושי ג'ורדן ב- J של λ הוא הריבוי הגאומטרי של λ ב- T.

אלגוריתם לג'ורדן מטריצות

רעיון - נניח ש- $B=(v_1,\dots,v_n)$ בסיס כך ש- $[T]_B^B=J_n(\lambda)$, אז:

$$T(v_1)=\lambda v_1+v_2 \longrightarrow (T-\lambda I)v_1=v_2$$
$$\vdots$$
$$T(v_n)=\lambda v_n \longrightarrow (T-\lambda I)v_n=0$$

סדרת וקטורים כזאת נקראת שרשרת ג'ורדן.
נחפש בסיס של המרחב שמורכב משרשראות כאלה.

בהינתן $A\in M_n(F)$:

1) נמצא פולינום אופייני
2) לכל λ ע"ע עם ריבוי אלגברי k:
3) נחשב l מרחבים עצמיים מוכללים כאשר ב- $j=l$ מתקיים $\dim V_l=k$:
$V_j=N((A-\lambda I)^j)$
נשים לב - $\{0\}=V_0\subsetneq V_1\dots\subsetneq V_l$
4) נמצא בסיסים לכל V_j
5) נסמן $d_1=\dim V_1$, $d_2=\dim V_2-\dim V_1$, ..., $d_l=\dim V_l-\dim V_{l-1}$
6) נבנה רשימה של l שורות מלמטה למעלה כשבשורה ה- j יש d_j מקומות
7) לכל שורה i מלמעלה למטה: (שיש בה מקום פנוי)
8) נבחר d_i וקטורים ב- V_i שהם בת"ל עם הבסיס של V_{i-1}
9) לכל וקטור שמיקמנו:
10) נמלא את הוקטור שמתחתיו ב- $(A-\lambda I)v$
11) נרשום את כל הוקטורים כבסיס, עמודה-עמודה משמאל לימין ונקבל k וקטורים.
12) מערך הג'ורדן המתאים יהיה מורכב מבלוקים שמספרם כמספר העמודות וגודל כל בלוק כגובה העמוד המתאים לו.
13) נסמן $P=(v_1\ \dots\ v_n)$, ונקבל ג'ורדן!

הצורה הרציונלית (צורת יעקובסון)

יהי V מ"ו נוצר סופית מעל שדה F, ו- $T: V \to V$ ט"ל.

הגדרה - יהי $q = a_0 + a_1 x + \dots + a_{d-1}x^{d-1} + x^d \in F[x]$ פולינום מתוקן ממעלה d.

המטריצה הנלוית ל- q היא:

$$C_1(q) = \begin{bmatrix} 0 & & 0 & -a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots \\ & \ddots & 0 & \\ 0 & & 1 & -a_{d-1} \end{bmatrix} \in M_d(F)$$

בפרט - $C_1(x-\lambda) = [\lambda]$

- עבור $r \in \mathbb{N}$, גוש יעקובסון מאורך r של q יהיה:

$$M = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ & & & 0 \\ & 0 & & \vdots \\ & & & 0 \end{bmatrix} \in M_d(F) \quad , \quad C_r(q) = \begin{bmatrix} C_1(q) & & 0 \\ M & \ddots & \\ 0 & M & C_1(q) \end{bmatrix} \in M_{dr}(F)$$

בפרט, $C_r(x-\lambda)$ היא $J_r(\lambda)$

- מערך יעקובסון של q הוא:

$$C(q) = \begin{bmatrix} C_{n_1}(q) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & C_{n_t}(q) \end{bmatrix}, \quad n_1 \ge n_2 \ge \dots \ge n_t \ge 1$$

n_1 נקרא האינדקס של המערך.

- מטריצת יעקובסון היא מטריצה מהצורה:

$$C = \begin{bmatrix} C_{(q_1)} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & C_{(q_s)} \end{bmatrix}, \quad q_1 \dots q_s \in F[x]$$

אי פריקים מתוקנים שונים

משפט - ל- V יש בסיס B כך ש- $[T]_B^B$ מטריצת יעקובסון, והיא יחידה (עד כדי סדר המערכים). אם $m_T = q_1^{r_1} \cdots q_s^{r_s}$ אז במטריצה יש s מערכי יעקובסון, כאשר המערך ה-i הוא של q_i ובעל אינדקס r_i.

מסקנה - תהי $A \in M_n(F)$. אז קיימת מטריצת יעקובסון יחידה (המתאימה ל- A כמו שמתואר במשפט) הדומה ל- A.

תרגיל - יהי $q \in F[x]$ מתוקן ממעלה d, ותהי $C = C_r(q) \in M_{dr}(F)$ אז $q^r = m_C = f_C$

מסקנה - תהי C מטריצת יעקובסון. יהיו $C_1 \dots C_s$ המערכים שלה, C_i שייך ל- q_i מאינדקס r_i לכל i. אז $m_C = q_1^{r_1} \cdots q_s^{r_s}$

סימון - מעתה יהי $q \in F[x]$ ממעלה d. תהי $N = q(T)$. אז לכל $v \in V$:

$$T^d(v) = -\sum_{i=0}^{d-1} a_i T^i(v) + N(v)$$

עבור $v \in V$ נסמן $\tilde{v} = (v, T(v), \dots, T^{d-1}(v))$

עבור סדרת וקטורים $A = (v_1 \dots v_k)$ נסמן $\tilde{A} = (v_1 \dots v_k, T(v_1) \dots T(v_k), \dots, T^{d-1}(v_1) \dots T^{d-1}(v_k))$

נשים לב $|\tilde{A}| = d|A|$, ואם A, B סדרות $\tilde{A} \cup \tilde{B}$ שווה ל- $\widetilde{A \cup B}$

גם, לכל i, j, מתקיים $T^i N^j = N^j T^i$, לכן $N(\tilde{A}) = \widetilde{N(A)}$

תרגיל - יהי B' בסיס של V, ו- v האיבר הראשון בו.

א - $[T]_{B'}^{B'} = C_r(q) \longleftrightarrow B' = (\tilde{v} \cup \widetilde{N(v)} \cup \dots \cup \widetilde{N^{r-1}(v)}) = (\widetilde{N^j(v)})_{j=0}^{r-1}$ ו- $v \in \ker N^r$

ב - אם B' מקיים את א', אז גם $B = \widetilde{(N^j(v))_{j=0}}$ בסיס של V.

ו- $[N]_B^B = \mathrm{Diag}(\underbrace{J_r(0) \dots J_r(0)}_{d})$

מסקנה - יהי B' בסיס של V. אז

א - $[T]_{B'}^{B'} = \mathrm{Diag}(\underbrace{C_r(q),\dots,C_r(q)}_{l_1}, \underbrace{C_{r-1}(q)\dots C_{r-1}(q)}_{l_2} \dots \underbrace{C_1(q)\dots C_1(q)}_{l_r})$

אם ורק אם $B = \bigvee_{k=1}^{r} \bigvee_{v\in A_k} (\overline{N^j(v)})_{j=0}^{r-k}$, כאשר $A_k \subseteq \ker N^{r+1-k}$ ו- $|A_k| = l_k$ $\forall k$.

ב - אם B' כמו ב-א' אז $B = \bigvee_{k=1}^{r} \bigvee_{v\in A_k} (N^j(v))_{j=0}^{r-k}$ בסיס של V ו- $[N]_B^B$ מערך ג'ורדן:

$$[N]_B^B = \mathrm{Diag}(\underbrace{J_r(0)\dots J_r(0)}_{d|A_1|}, \underbrace{J_{r-1}(0)\dots J_{r-1}(0)}_{d|A_2|} \dots \underbrace{J_1(0)\dots J_1(0)}_{d|A_r|})$$

למה - נניח q אי פריק $q(T)=0$.
תהי $B\subseteq V$ סגורה כך ש- $\tilde{B}$ בת"ל.
אז יש $A\subseteq V$ כך ש- $\tilde{B}\cup\tilde{A}$ בסיס של V.
בפרט יש $A\subseteq V$ כך ש- $\tilde{A}$ בסיס על V.

משפט - נניח כי $m_T = q^r$, $q\in F[x]$ פולינום אי-פריק ממעלה d.
אז יש מטריצת יעקובסון יחידה C עבורה יש בסיס B' של V (לאו דווקא יחיד)
כך ש- $[T]_{B'}^{B'} = C$, ו- C מערך יעקובסון עם אינדקס r על q.

תרגיל - תהי $B, A\in M_n(F)$ אז:
א - $f_A = f_{A^t}$
ב - $m_A = m_{A^t}$
ג - $A\sim B \longleftrightarrow A^t\sim B^t$
ד - $A\sim A^t$

תרגיל - יהיו $F\subseteq F'$ שדות. תהיינה $A,B\in M_n(F)$ דומות מעל F'. אזי הן דומות מעל F.

מרחבי מכפלה פנימית

בפרק זה $F=\mathbb{R}$ או $F=\mathbb{C}$

תזכורת לתכונות מרוכבים:

- $z \in \mathbb{R} \leftrightarrow z = \bar{z}$
- $z = 0 \leftrightarrow |z| = 0$
- $\bar{\bar{z}} = z$
- $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$
- $\bar{z} z = |z|^2$
- $Re(z) = \frac{z + \bar{z}}{2}$
- $\bar{z} = x - iy$
- $|z| = \sqrt{x^2+y^2}$
- $\overline{z_1 \pm z_2} = \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2$

הגדרה - יהי V מ"ו מעל F. מכפלה פנימית על V היא פ"ל $V \times V \to F$ כך שמתקיים לכל $u,v,w \in V$ ולכל $\alpha \in F$:

1) $\langle u, v+w \rangle = \langle u,v \rangle + \langle u,w \rangle$
2) $\langle u, \alpha v \rangle = \alpha \langle u,v \rangle$
3) $\overline{\langle v,u \rangle} = \langle u,v \rangle$
4) $\langle v,v \rangle > 0$

המכפלה הסטנדרטית (הסקלרית) מוגדרת: $\langle u,v \rangle_{st} = \bar{u}^t \cdot v = \sum_{i=1}^{n} \bar{a}_i b_i$

למה -
1) $\langle u+w, v \rangle = \langle u,v \rangle + \langle w,v \rangle$
2) $\langle \alpha u, v \rangle = \bar{\alpha} \langle u,v \rangle$
3) $\langle 0,v \rangle = \langle u,0 \rangle = 0$

הגדרה -
1) $\|v\| = \sqrt{\langle v,v \rangle}$ - הנורמה (אורך) של V
2) $\langle u,v \rangle = \langle v,u \rangle = 0$ - u ניצב ל-v, $u \perp v$
3) סדרה $u_1 \dots u_n \in V$ נקראת אורתוגונלית אם $u_i \perp u_j$ $\forall i \neq j$
4) סדרה $u_1 \dots u_n \in V$ נקראת אורתונורמלית אם היא אורתוגונלית ו- $\|u_i\| = 1$ $\forall i$. כלומר $\langle u_i, u_j \rangle = \delta_{ij}$

דוגמה קנונית - הבסיס הסטנדרטי הוא אורתונורמלי ביחס למכפלה הסטנדרטית

למה - למת האיפיון: תהי $u_1 \dots u_n$ סדרה אורתוגונלית במרחב מכפלה פנימית V. יהיו $v = b_1 u_1 + \dots + b_n u_n \in V$, $u = a_1 u_1 + \dots + a_n u_n \in V$

א - $a_i \|u_i\|^2 = \langle u_i, u \rangle$
בפרט, אם $u_i \neq 0$ אז $a_i = \frac{\langle u_i,u \rangle}{\|u_i\|^2}$
בפרט, אם $\|u_i\| = 1$ אז $a_i = \langle u_i,u \rangle$

ב - $\langle u,v \rangle = \sum_{i=1}^{n} \bar{a}_i b_i \|u_i\|^2$
בפרט, אם $\|u_i\| = 1$ לכל i, אז $\langle u,v \rangle = \sum_{i=1}^{n} \bar{a}_i b_i$

ג - $\|u\|^2 = \sum_{i=1}^{n} |a_i|^2 \|u_i\|^2$
בפרט, אם $\|u_i\| = 1$ לכל i, אז $\|u\|^2 = \sum_{i=1}^{n} |a_i|^2$

מסקנה - יהי B בסיס אורתונורמלי של מרחב מכפלה פנימית V. יהיו $u,v \in V$. אז $\langle u,v \rangle = \langle [u]_B, [v]_B \rangle$

משפט - סדרה אורתוגונלית $u_1 \dots u_n$ שאיבריה שונים מ-0 היא בת"ל.

תהליך Gram-Schmidt למציאת בסיס אורתוגונלי

נתונה סדרה $v_1 \dots v_n \in V$. נמצא סדרה אורתוגונלית $u_1, \dots u_n \in V$ המקיימת:

1) $span(v_1, \dots v_k) = span(u_1, \dots u_k)$. $\forall 1\le k\le n$
2) $u_k = 0 \longleftrightarrow v_k \in span(v_1, \dots v_{k-1})$. $\forall 1\le k\le n$

בפרט מתקיים גם:

3) $u_1, \dots u_n \neq 0 \longleftrightarrow v_1 \dots v_n$ בת"ל מעל F
4) $v_1 \dots v_n$ בסיס של V $\longleftrightarrow$ $u_1, \dots u_n$ בסיס של V

בניה - נבנה סדרה באינדוקציה על k.

בסיס - $u_1 = v_1$

לכל $k+1$, נגדיר $u_{k+1} = v_{k+1} - (c_1u_1 + c_2u_2 + \dots + c_ku_k)$

כאשר:

$$\forall 1\le i\le k.\ c_i = \begin{cases} \frac{\langle u_i, v_{k+1}\rangle}{\|u_i\|^2}, & u_i\neq 0 \\ 0, & u_i = 0\end{cases}$$

(כלומר $c_i\|u_i\|^2 = \langle u_i, v_{k+1}\rangle$)

* הערה - ניתן לחלק את u_{k+1} ב- $\|u_{k+1}\|$ כדי לקבל בסיס אורתונורמלי

מסקנה - יהי V מרחב מכפלה פנימית נוצר סופית. אז יש לו בסיס אורתונורמלי

הערה - המשמעות הגיאומטרית של תהליך Gram-Schmidt

נסמן $U = span(u_1,\dots u_k) = span(v_1,\dots v_k)$, $u = c_1u_1 + \dots + c_nu_n$

אז $u\in U$, ו- $v_{k+1} = u_{k+1} + u$, ו- u_{k+1} ניצב ל-U.

אז:

1) u הוא ההיטל של v_{k+1} על U
2) u_{k+1} הוא החץ ממקום ב-U לקצה של v_{k+1}, שניצב ל-U.
3) בפרט, אורכו $\|u_{k+1}\|$ הוא המרחק בין U לקצה של v_{k+1}.

מסקנה - יהי V מרחב מכפלה פנימית נוצר סופית.
תהי $v_1 \dots v_r$ סדרה אורתוגונלית שאיבריה שונים מ-0.
אז אפשר להשלימה לבסיס אורתוגונלי של V.

משפט - אי שוויון קושי-שוורץ

יהי V מרחב מ"פ ויהיו v_1, v_2 וקטורים ב-V.
אז מתקיים:

$$|\langle v_1, v_2\rangle| \le \|v_1\|\cdot\|v_2\|$$

ויש שוויון אמ"מ v_1, v_2 תלוים לינארית.

משפט - אי-שוויון המשולש

יהי V מרחב מ"פ ויהיו $v_1,v_2\in V$. אז $\|v_1+v_2\| \le \|v_1\| + \|v_2\|$

הגדרה - יהי V מרחב מ"פ ויהי U תת מרחב שלו.
המשלים הניצב (האורתוגונלי) הוא - $U^\perp = \{v\in V | \forall u\in U.\ \langle u, v\rangle = 0\}$

למה - א- $U^\perp$ תת מרחב של V
ב- $U\cap U^\perp = \{0\}$

מציאת המשלים הניצב במרחב נוצר סופית:
יהי $v_1 \dots v_r$ בסיס של U. נשלימו לבסיס של V: $v_1,\dots v_r, v_{r+1}, \dots v_n$.
בעזרת תהליך גרם-שמידט נמצא בסיס אורתונורמלי $u_1, \dots u_r, u_{r+1}, \dots u_n$
רק ש- $U = span(v_1 \dots v_r) = span(u_1, \dots u_r)$. אז $U^\perp = span(u_{r+1}\dots u_n)$.

משפט - א- $U^\perp = span(u_{r+1}\dots u_n)$. בפרט $\dim U^\perp = \dim V - \dim U$
ב- $U + U^\perp = V$ לכן $U\oplus U^\perp = V$

מסקנה - אם V נוצר סופית, $(U^\perp)^\perp = U$

העתקות במרחבי מכפלה פנימית

בפרק זה, $F=\mathbb{R}$ או $F=\mathbb{C}$. V מרחב מ"פ נוצר סופית מעל F. $T:V\to V$ ט"ל.

משפט - לכל $v\in V$ קיים ויחיד $w=T^*(v)\in V$ המקיים:
$\forall u\in V.\ \langle T(u),v\rangle = \langle u,w\rangle = \langle u,T^*(v)\rangle$
ו- T^* ט"ל.

הגדרה - T^* נקראת ההעתקה הצמודה של T
עבור $A\in M_n(F)$, המטריצה הצמודה לה $A^*\in M_n(F)$ מוגדרת ע"י:
$A^*=\overline{A^t} \longleftrightarrow (A^*)_{ij}=\overline{(A)_{ji}}$ $\forall 1\le i,j\le n$
* אם $F=\mathbb{R}$, אז $A^*=A^t$

משפט - יהי $B=(u_1 \dots u_n)$ בסיס אורתונורמלי של V. אז $[T^*]_B=[T]_B^*$

למה - יהי $\alpha\in F$ ו- $T,S:V\to V$ ט"ל.
1) $(T+S)^*=T^*+S^*$
2) $(\alpha T)^*=\bar{\alpha}T^*$
3) $(TS)^*=S^*T^*$
4) $((T)^*)^*=T$

הגדרה - תהי $T:V\to V$ ט"ל ו- $A\in M_n(F)$
- T, A נקראות צמודה לעצמה אם $T=T^*$, $A=A^*$
אם $F=\mathbb{C}$ נאמר גם הרמיטית, אם $F=\mathbb{R}$ נאמר גם סימטרית
- T, A נקראות אוניטרית אם $T^*T=1$, $AA^*=I$
אם $F=\mathbb{R}$ נאמר גם אורתוגונלית
- T, A נקראות נורמלית אם $T^*T=TT^*$, $AA^*=A^*A$

מסקנה - יהי B בסיס אורתונורמלי של V, ו- $A=[T]_B$.
אז T צמודה לעצמה/ אוניטרית/ נורמלית $\longleftrightarrow$ A כנ"ל

למה - נניח $\langle v,T(v)\rangle=0$ $\forall v\in V$, וכי
$F=\mathbb{C}$ או $F=\mathbb{R}$ ו- T צמודה לעצמה
אז $T=0$

משפט - נניח $F=\mathbb{C}$. אז $T=T^* \longleftrightarrow \forall v\in V\ \langle v,T(v)\rangle\in\mathbb{R}$

משפט - התנאים הבאים שקולים:
1) T אוניטרית: $T^*T=1$
2) $TT^*=1$
3) T מעתיקה כל בסיס אורתונורמלי של V לבסיס אורתונורמלי של V
4) T מעתיקה בסיס אורתונורמלי מסוים של V לבסיס אורתונורמלי של V
5) T משמרת מכפלה פנימית: $\forall u,v\in V.\ \langle T(u),T(v)\rangle=\langle u,v\rangle$
6) T משמרת נורמה: $\forall u\in V\ \|T(u)\|=\|u\|$
7) T משמרת מרחק: $\forall u,v\in V.\ \|T(u)-T(v)\|=\|u-v\|$

משפט - עבור $A\in M_n(F)$ התנאים הבאים שקולים:
1) A אוניטרית - $A^*A=AA^*=I$
2) העמודות של A מהוות בסיס אורתונורמלי
3) השורות של A -"- -"- -"-

למה - תהי $T:V\to V$ נורמלית ($T^*T=TT^*$), ויהיו $v\in V$, $\lambda\in F$
אם $T(v)=\lambda v$ אז $T^*(v)=\bar{\lambda}v$

למה - תהי $T: V \to V$ נורמלית. וקטורים עצמיים השייכים לערכים עצמיים שונים ניצבים זה לזה.

למה - תהי $T: V \to V$ ט"ל רק ש- f_T מכפלה של גורמים ליניארים $(x-\lambda)$ אז T נורמלית $\longleftrightarrow$ קיים בסיס אורתונורמלי B של V המורכב מ-ו"ע של T (כלומר $[T]_B$ אלכסונית)

משפט - נניח $F=\mathbb{C}$. ט"ל $T: V \to V$ היא נורמלית $\longleftrightarrow$ קיים בסיס אורתונורמלי B של V המורכב מו"ע של T ($[T]_B$ אלכסונית)

מסקנה - $A \in M_n(\mathbb{C})$. אז A נורמלית $\longleftrightarrow$ קיימת $P \in M_n(\mathbb{C})$ אוניטרית כך ש- $P^{-1}AP = P^*AP$ אלכסונית

מסקנה - תהי $A \in M_n(F)$ נורמלית. אז:
א - A צמודה לעצמה $\longleftrightarrow$ כל שורשי f_A ב-$\mathbb{C}$ הם ממשיים.
ב - A אוניטרית $\longleftrightarrow$ כל שורשי f_A ב-$\mathbb{C}$ הם בעלי ערך מוחלט 1.

משפט - נניח $F=\mathbb{R}$. ט"ל $T: V \to V$ היא צמודה לעצמה $\longleftrightarrow$ קיים בסיס אורתונורמלי B של V המורכב מוקטורים עצמיים של T ($[T]_B$ אלכסונית)

מסקנה - מטריצה $A \in M_n(\mathbb{R})$ סימטרית $\longleftrightarrow$ קיימת $P \in M_n(\mathbb{R})$ אורתוגונלית כך ש- $P^*AP = P^{-1}AP$ אלכסונית

משפט - נניח $F=\mathbb{R}$, תהי $T: V \to V$ ט"ל אורתוגונלית. אז קיים בסיס B של V כך ש- $[T]_B$ מהצורה:

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & & & \\ & & 1 & & & & & \\ & & & -1 & & & & \\ & & & & \ddots & & & \\ & & & & & -1 & & \\ & & & & & & \begin{matrix} \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 \end{matrix} & \\ & & & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & & & \begin{matrix} \cos\theta_r & -\sin\theta_r \\ \sin\theta_r & \cos\theta_r \end{matrix} \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{\quad\quad}_{p}\ \underbrace{\quad\quad}_{q}\ \underbrace{\quad\quad\quad\quad\quad\quad}_{r}$$

תבניות בילינאריות

הגדרה - **תבנית בילינארית** על $V \times W$ היא העתקה $f: V \times W \to F$ המקיימת:
- $f(v+v', w) = f(v,w) + f(v',w)$
- $f(\alpha v, w) = \alpha f(v,w)$
- $f(v, w+w') = f(v,w) + f(v,w')$
- $f(v, \alpha w) = \alpha f(v,w)$

אוסף התבניות הבילינאריות על $V \times W$ הוא מרחב וקטורי על F, נסמנו $Bil(V,W)$, הפעולות עליו:

$$(f+g)(v,w) = f(v,w) + g(v,w)$$
$$(\alpha f)(v,w) = \alpha f(v,w)$$

משפט - יהי $B=(v_1,\dots,v_m)$ בסיס של V, $C=(w_1,\dots,w_n)$ בסיס של W
1) לכל $f \in Bil(V,W)$ קיימת מטריצה יחידה $A=\theta_C^B(f) \in M_{m\times n}(F)$ כך ש:
$$\forall v \in V, w \in W.\ f(v,w) = ([v]_B)^t A [w]_C$$
2) המטריצה $A=\theta_C^B$ מוגדרת ע"י:
$$(A)_{ij} = f(v_i, w_j)$$
3) תהי $A \in M_{m\times n}(F)$. נגדיר $f: V \times W \to F$ כמו ב-1. אז f תבנית בילינארית ו- $A = \theta_C^B$
4) ההתאמה $f \mapsto A$ הנ"ל היא איזומורפיזם של מרחבים וקטורים.

מסקנה - $\dim Bil(V,W)=\dim V\cdot\dim W$

- $\dim Bil(V,V)=(\dim V)^2$

משפט - יהיו B,B' שני בסיסים של V ויהיו C,C' שני בסיסים של W.
תהיינה $A=\theta_C^B(f)$, $A'=\theta_{C'}^{B'}(f)$, P מטריצת מעבר $B\to B'$, Q מטריצת מעבר $C\to C'$.
אז $A'=P^tAQ$

הגדרה - מטריצות $A,A'\in M_{m\times n}(F)$ נקראות **שקולות** אם יש $Q\in M_n(F)$, $P\in M_m(F)$ הפיכות כך ש- $A'=P^tAQ$

- מטריצות ריבועיות $A,A'\in M_n(F)$ נקראות **חופפות** אם יש P הפיכה כך ש- $A'=P^tAP$

* הערה - חפיפה ושקילות הם יחס שקילות

מסקנה -
1) $A,A'\in M_{m\times n}(F)$ שקולות $\longleftrightarrow$ הן מייצגות אותה תבנית בילינארית (בבסיסים אחרים)
2) $A,A'\in M_{m\times n}(F)$ שקולות $\longleftrightarrow$ $rank\ A=rank\ A'$
3) $A,A'\in M_n(F)$ חופפות $\longleftrightarrow$ הן מייצגות אותה תבנית בילינארית של V

טענה - תהיינה $A,A'\in M_n(F)$ חופפות. אז $rank\ A=rank\ A'$ ו- $\det A'=c^2\det A$

הגדרה - תבנית בילינארית $f\in Bil(V,V)$ נקראת **סימטרית** אם $f(v,w)=f(w,v)$ $\forall v,w\in V$.
עבור f כזאת הפונקציה $q:V\to F$ המוגדרת ע"י $q(v)=f(v,v)$
נקראת **תבנית ריבועית**.

למה - תהי $f\in Bil(V,V)$, יהי B בסיס של V ותהי $A=[f]_B$.
אזי f סימטרית $\longleftrightarrow$ A סימטרית ($A=A^t$)

למה - תהי $f\in Bil(V,V)$ סימטרית. אזי:
א - (למת הקיטוב) - $\forall v,w\in V.\ 2f(v,w)=f(v+w,v+w)-f(v,v)-f(w,w)$
ב - אם $char\,F\neq 2$ ו- $f\neq 0$, אז יש $u\in V$ כך ש- $f(u,u)\neq 0$.

משפט - תהי $f\in Bil(V,V)$ סימטרית. נניח $char\,F\neq 2$.
אז קיים בסיס $B=(u_1,\dots,u_n)$ של V כך ש- $f(u_i,u_j)=0$ $\forall i\neq j$. בפרט:
א - $[f]_B=Diag(c_1,\dots,c_n)$, כאשר $c_i=f(u_i,u_i)$ $\forall i$.
ב - אם $w=\sum b_iv_i$, $v=\sum a_iv_i$, אז $f(v,w)=\sum_{i=1}^n a_ib_ic_i$

מסקנה - תהי $A\in M_n(F)$ סימטרית ו- $char\,F\neq 2$.
אז A חופפת למטריצה אלכסונית.

הגדרה - **הדרגה** $rank\ f$ של $f\in Bil(V,V)$ סימטרית היא הדרגה של המטריצה המייצגת את f לפי בסיס כלשהו של V.

משפט - יהי V מרחב וקטורי מעל $\mathbb{C}$ ותהי $f\in Bil(V,V)$ סימטרית. אז:
א - יש בסיס ל-V כך שהמטריצה של f לפיו היא $D_r=Diag(\underbrace{1,\dots,1}_r,0,\dots,0)$
ב - $r=rank\ f$ (ולכן D_r נקבע ביחידות ע"י f)

מסקנה -
א - כל מטריצה סימטרית מעל $\mathbb{C}$ חופפת למטריצה יחידה מהצורה D_r
ב - תהיינה $A,B\in M_n(\mathbb{C})$. אז A,B חופפות $\longleftrightarrow$ $rank\ A=rank\ B$

משפט - יהי V מ"ו מעל $\mathbb{R}$ ו- $f\in Bil(V,V)$ סימטרית. אזי יש בסיס B כך ש- $[f]_B$ אלכסונית.
אם יש לה p רכיבים חיוביים ו- q שליליים, אזי יש לה בסיס כך שהמטריצה לפיו היא:
$D_{p,q}=Diag(\underbrace{1,\dots,1}_p,\underbrace{-1,\dots,-1}_q,0,\dots,0)$

~~תרגיל לינארית~~

~~צורת יעקובסון (צורה קנונית רציונלית)~~

~~* המשרך של יעקובסון:~~

~~* סימטריית יעקובסון:~~

~~* AB דומות ⟷ יש להן אותה צורת יעקובסון~~

~~* תכונות - אורך הבלוק ... הגדול ביותר במשרך ... שווה ל- $\deg q_j \cdot r_j$ ... ולכן הסדר של הבלוק ... סכום המשרך $C(q_j)$ שווה ל- $a_j \cdot \deg q_j$ כאשר $a_j = n_1 + \dots + n_k$~~

משפט - משפט סילווסטר

יהי V מ"ו ממימד n מעל $\mathbb{R}$ ותהי $f \in Bil(V,V)$ סימטרית.
נניח ש-f מיוצגת לפי בסיס $u_1, \dots, u_n$ ע"י $D'_{p,q}$ אלכסונית
עם p רכיבים חיוביים ו-q שליליים, ולפי בסיס $v_1, \dots, v_n$ ע"י
מטריצה אחרת $D'_{s,t}$ עם אותם סימונים.
אז $q = t$, $p = s$.

מסקנה - תהי $A \in M_n(\mathbb{R})$ סימטרית אז:
א - A חופפת למטריצה יחידה מהצורה $D_{p,q}$
ב - אם A חופפת ל- $D_{p,q}$, נגדיר $\sigma(A) = p - q$ להיות **החתימה** של A.
אז $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ סימטריות חופפות ⟷ יש להן אותה דרגה ואותה חתימה

הגדרה - יהי V מ"ו סופי מעל $\mathbb{R}$. $f \in Bil(V,V)$ סימטרית נקראת:
- **חיובית** אם $\forall v \in V.\ f(v,v) \geq 0$
- **חיובית גמורה** אם $\forall v \in V.\ f(v,v) > 0$

משפט - V מ"ו סופי מעל $\mathbb{R}$, $f \in Bil(V,V)$ סימטרית, $A \in M_n(\mathbb{R})$ המטריצה של f לפי B.
התנאים הבאים שקולים:
1) f חיובית גמורה
2) A חופפת ל- $D = Diag(c_1, \dots c_n)$, $\forall i.\ c_i > 0$
3) A חופפת ל- I_n
4) $A = P^t P$ $P \in M_n(\mathbb{R})$ הפיכה
5) $\sigma(A) = n$ (החתימה של A)
6) f היא מכפלה פנימית על V
7) שורשי f_A ב- $\mathbb{C}$ הם ממשיים חיוביים

סימון - עבור $A \in M_n(\mathbb{R})$, נסמן $A_k = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{bmatrix} \in M_k(\mathbb{R})$
מטריצות אלה והדטרמיננטות שלהן נקראות **המינורים הראשיים** של A.

משפט - תהי $A \in M_n(\mathbb{R})$ סימטרית, ונניח $\forall i.\ \det A_i \neq 0$.
אז A חופפת ל- $D_{p,q}$ כאשר q מספר החלפות הסימן בסדרה $\det A_1, \det A_2 \dots \det A_n$
ו- p מספר אי-החלפות הסימן.

תרגיל - $A \in M_n(\mathbb{R})$ סימטרית, $0 \neq \alpha \in \mathbb{R}$. $\sigma(\alpha A) = \begin{cases} \sigma(A) & \alpha > 0 \\ -\sigma(A) & \alpha < 0 \end{cases}$, $f_{\alpha A}(x) = \alpha^n f_{(A)}(\alpha^{-1} x)$

מיון שניוניות

הגדרה - **שניונית** (quadric) X במרחב $\mathbb{R}^n$ היא קבוצה של $v=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^n$
כשהרכיבים $x_1,\dots,x_n$ מקיימים:
$$a+\sum_{i=1}^{n}2b_ix_i+\sum_{i=1}^{n}a_{ii}x_i^2+\sum_{1\le i<j\le n}2a_{ij}x_ix_j=0$$
ו- a_{ij} לא כולם 0. אגף שמאל של המשוואה הוא פולינום ממעלה 2 ב- $x_1,\dots,x_n$

נוכל להגדיר $a_{ij}=a_{ji}$, $u=\begin{pmatrix}b_1\\ \vdots\\ b_n\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^n$, $A=(a_{ij})\in M_n(\mathbb{R})$.
אז A סימטרית, $A\neq 0$, וניתן לרשום את הקשר הנ"ל כך:
$$a+2u^tv+v^tAv=0$$
A נקראת **המטריצה המצומצמת** של השניונית

מטריצת הגושים $\tilde{A}$ תקרא **המטריצה המורחבת** של השניונית:
$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc}1 & n\end{array}\\ \tilde{A}= & \begin{bmatrix}a & u^t\\ u & A\end{bmatrix}\end{array}\begin{array}{c}1\\ n\end{array}$$
גם היא סימטרית.
אפשר לרשום גם:
$$\begin{pmatrix}1\\ v\end{pmatrix}^t\tilde{A}\begin{pmatrix}1\\ v\end{pmatrix}=0$$

פעולות על שניוניות -

שינוי בסיס אורתונורמלי: נבחר בסיס אורתונורמלי של $\mathbb{R}^n$ - B.
נסמן P מטריצת המעבר מהבסיס הסטנדרטי ל- B (היא אורתוגונלית).
אם $v'=[v]_B$, אז נקבל:
$$a+2(P^tu)^tv'+(v')^t(P^tAP)v'=0$$
כלומר, נקבל שניונית חדשה עם $A'=P^tAP$ בקואורדינטות של v'.
המטריצה המורחבת:
$$\tilde{A}'=\begin{bmatrix}a & u^tP\\ P^tu & P^tAP\end{bmatrix}=\tilde{P}^t\tilde{A}\tilde{P},\quad \tilde{P}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & P\end{bmatrix}$$
($\tilde{P}$ הפיכה ואורתוגונלית).

הזזת הראשית: נזיז את ראשית הצירים ל- $w\in\mathbb{R}^n$
אם $v'=v-w$, אז:
$$(a+2u^tw+w^tAw)+2(u+Aw)^tv'+v'^tAv'=0$$
כלומר, נקבל שניונית חדשה עם A ומטריצה מורחבת
$$\tilde{A}'=\begin{bmatrix}a+2u^tw+w^tAw & u^t+w^tA\\ u+Aw & A\end{bmatrix}=\tilde{P}^t\tilde{A}\tilde{P}$$
כאשר $P=\begin{bmatrix}1 & 0\\ w & I_n\end{bmatrix}$ הפיכה (אך לא אורתוגונלית).

הכפלה בקבוע: נכפיל את המשוואה השניונית בסקלר $0\neq c\in\mathbb{R}$.
המשוואה המתקבלת מתארת את X, והמטריצה המצומצמת והמורחבת הן cA, $c\tilde{A}$.

מסקנה - שינוי בסיס והזזת צירים מעביר את משוואות השניונית למשוואה בקואורדינטות אחרות.
אבל הגדלים הבאים אינם משתנים:
1) $rank(A), rank(\tilde{A})$
2) $\sigma(A), \sigma(\tilde{A})$
3) הסימן של $\det A$, $\det\tilde{A}$
4) ה- ע"ע של A.

הכפלה ב- $c\neq 0$ שומרת את 1 ומכפילה את 4 ב- c.
אם $c>0$ היא שומרת 2,3.
אם $c<0$ היא מכפילה את 2 ב- -1, ואת 3 ב- $(-1)^n$, $(-1)^{n+1}$ בהתאמה.

למה - תהיינה $x, x' \in \mathbb{R}$ שניוניות ו- $\tilde{A}, \tilde{A}'$ המטריצות המורחבות.
אז x' מתקבלת מ- x ע"י סדרה של שב"ו מ הצבות $\leftrightarrow \tilde{A}' = \tilde{P}^t \tilde{A} \tilde{P}$
כאשר $\tilde{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \omega & P \end{bmatrix} \in M_{n+1}(\mathbb{R})$ מטריצת גושים בה $P \in M_n(\mathbb{R})$ אורתוגונלית ו- $\omega \in \mathbb{R}^n$

משפט - תהי x שניונית. נסמן $r = rank(A)$, $\sigma = \sigma(A)$, $\tilde{r} = rank(\tilde{A})$, $\tilde{\sigma} = \sigma(\tilde{A})$, כאשר A מטריצה מצומצמת ו- $\tilde{A}$ מורחבת של x.
א - ע"י סדרה של שב"ו והצבות עוברת x לשניונית בעלת משוואה יחידה מהצורה:
$\lambda_1 x_1^2 + \dots + \lambda_s x_s^2 = \phi$ כאשר $1 \le s \le n$, $0 \ne \lambda_1 \ge \lambda_2 \ge \dots \ge \lambda_s$
1 - $\phi = \alpha \in \mathbb{R}$ או $\phi = 2\beta x_{s+1}$, $\beta > 0$
ב - מתקיים $s = r$ ו- $\lambda_1 \dots \lambda_r$ ע"ע של A השונים מ-0 (ריבויים אלגבריים)
ג -
$$\phi = \begin{cases} 0 & \tilde{r} = r \\ \alpha > 0 & \tilde{r} = r+1,\ \tilde{\sigma} = \sigma - 1 \\ \alpha < 0 & \tilde{r} = r+1,\ \tilde{\sigma} = \sigma + 1 \\ 2\beta x_{r+1} & \tilde{r} = r+2 \end{cases}$$

משפט - תהי x שניונית, עם הסימונים הנ"ל.
א - ע"י סדרה של הצבות והכפלות ושב"ו אפשר להעביר את המשוואה של x ל:
$$\phi = \lambda_1 x_1^2 + \dots + \lambda_p x_p^2 + \lambda_{p+1} x_{p+1}^2 + \dots + \lambda_{p+q} x_{p+q}^2$$
כאשר $\lambda_1 \dots \lambda_p > 0 > \lambda_{p+1} \dots \lambda_{p+q}$, $p \ge 1,\ p \ge q \ge 0$
ו- $\phi = 0$ או $\phi = \pm 1$ או $\phi = 2x_{p+q+1}$
ב - המשוואה הנ"ל היא יחידה במובן הבא:
$$p - q = |\sigma|,\ p + q = r$$
יש $0 \ne \gamma \in \mathbb{R}$ כך ש- $\gamma\lambda_1 \dots \gamma\lambda_{p+q}, 0 \dots 0$ ע"ע של A.
ג -
$$\phi = \begin{cases} 0 & \tilde{r} = r \\ +1 & \tilde{r} = r+1,\ \sigma \ne 0,\ |\tilde{\sigma}| = |\sigma| - 1 \\ -1 & \text{-"-} \quad \text{-"-} \quad |\tilde{\sigma}| = |\sigma| + 1 \\ \pm 1 & \text{-"-} \quad \sigma = 0 \\ 2x_{p+q+1} & \tilde{r} = r+2 \end{cases}$$

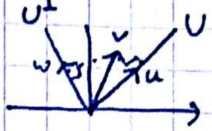
תרגיל - בסימונים הנ"ל נניח $\det A \ne 0$, $\det \tilde{A} \ne 0$, אז:
א - $r = n$, $\tilde{r} = n+1$, ולכן $\phi = +1$ או $\phi = -1$
נניח גם כי $\sigma = \sigma(A) > 0$
ב - אם $\det A$, $\det \tilde{A}$ שוות סימן, אז $\phi = -1$
ג - -"- -"- מנוגדות סימן, אז $\phi = +1$

תוספות והשלמות

- הטלה אורתוגונלית

יהי V ממ"פ נ"ס מעל $F=\mathbb{R},\mathbb{C}$. נניח $U\subseteq V$ תת מרחב.
ראינו ש- $V=U+U^{\perp}$, לכן לכל $v\in V$, קיימים ויחידים $u\in U$, $w\in U^{\perp}$
כך ש- $v=u+w$.
העתקה לינארית היא הטלה אורתוגונלית על U ביחס למ"פ עם העתקה הנ"ל
$P_U:V\to V$ ומוגדרת ע"י $P_U(v)=u$

דוגמה:



טענה - נניח $u_1,\dots,u_k\in U$ בסיס אורתוגונלי של U.
אזי:
$$P_U(v)=\sum_{i=1}^{k}\frac{\langle u_i,v\rangle}{\|u_i\|^2}$$

- מרחק

יהי V ממ"פ ויהי $U\subseteq V$ תת מרחב
המרחק בין $v\in V$ לתת מרחב U ביחס למכפלה הפנימית מוגדר:
$$dist(v,U)=\inf_{u\in U}\|v-u\|$$

טענה - מתקיים $dist(v,U)=\|v-P_U(v)\|$

- השלמה מפריקות בחוג הפולינומים

משפט - יהי F שדה ויהי $R=F[x]$. יהי $\{q_i\}_{i\in I}$ אוסף כל הפולינומים האי פריקים המתוקנים ב-$\mathbb{R}$
אזי לכל $0\neq f\in R$ יש $c\in\mathbb{R}^{*}=F^{*}$ יחיד ו- $m_i\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ $\forall i\in I$
כמעט כולם 0, יחידים, כך ש:
$$f=c\prod_{i\in I}q_i^{m_i}$$

משפט - יהי $f\in\mathbb{R}[x]$ מתוקן.
אז f אי פריק $\longleftrightarrow$
א- $f=x-\alpha$, $\alpha\in\mathbb{R}$ או:
ב- $f=x^2+bx+c$, $b,c\in\mathbb{R}$, $b^2-4c<0$

למה - הלמה של גאוס
אם $f\in\mathbb{Z}[x]$ מתוקן, ויש $g,h\in\mathbb{Q}[x]$ מתוקנים כך ש- $f=gh$,
אז $g,h\in\mathbb{Z}[x]$

מסקנה - יהי $f\in\mathbb{Z}[x]$ מתוקן, ויהי $\alpha\in\mathbb{Q}$ שורשו. אז $\alpha\in\mathbb{Z}$

אלגוריתם ללכסון מטריצה

1) נמצא פולינום אופייני $(f_A(x)=det(x\cdot I-A))$
2) אם יש לו גורמים לא לינאריים, לא ניתן ללכסון (אפשר ב- $\mathbb{C}$)
3) נרשום את ה-ע"ע (שורשי f_A)
4) לכל אחד מהם, נמצא בסיס למרחב העצמי (ע"י פתירת המערכת $(A-\lambda I)x=0$)
5) אם עבור ע"ע הריבוי הגיאומטרי קטן מהאלגברי, לא ניתן ללכסן.
6) אם לא, נשים את וקטורי הבסיסים שמצאנו כעמודות P, ונקבל $A'=P^{-1}AP$ אלכסונית
7) בעמודה ה-i של A' יופיע ה-ע"ע המתאים לו"ע בעמודה ה-i

* הערה- ללכסון אוניטרי יש לקחת בסיס אורתונורמלים.

אלגוריתם לשילוש מטריצה

1) נקח את איחוד הבסיסים למרחבים העצמיים E ונשלים לבסיס B (עם הבסיס הסטנדרטי לרוב)
2) נשים את וקטורי B כעמודות P ונביט ב- $Q=P^{-1}AP$.
3) נמחק מ- Q את החלק המשולש כבר ($\|E\|$ העמודות והשורות הראשון).
4) נשלש את המטריצה Q' שקיבלנו ע"י P_1 (ברקורסיה)
5) נגדיל את P_1 חזרה ע"י הוספת $\|E\|$ עמודות ושורות של I
6) נקבל $A'=P_1^{-1}P^{-1}APP_1$ מטריצה משולשית