אלגברה לינארית

ⓒ ארזים

19 באפריל 2016

1 תבניות בי־לינאריות

V מרחב ווקטורי מעל F, $f\left(u,v\right)$ תבנית בי לינארית, $f:V\times V\to F$. מתקיים:

$$\begin{aligned} f\left(u_1+u_2,v\right) &= f\left(u_1,v\right)+f\left(u_2,v\right)\\ f\left(u,v_1+v_2\right) &= f\left(u,v_1\right)+f\left(u,v_2\right)\\ f\left(\alpha u,v\right) &= f\left(u,\alpha v\right)=\alpha f\left(u,v\right)\end{aligned}$$

דוגמא

1.

$$f\left(\begin{pmatrix}a\\c\end{pmatrix},\begin{pmatrix}b\\d\end{pmatrix}\right)=ad-bc$$

2.

$$f\left(\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}\right)=0$$

3. לא תבנית בי־לינארית:

$$f\left(\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}\right)=1$$

4. לא תבנית בי־לינארית:

$$f\left(\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}\right)=x_1y_2+3x_1x_2$$

5. לא תבנית בי־לינארית:

$$f\left(\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}\right)=y_1$$

הגדרה 1.1 תבנית f נקראת סימטרית אם $f\left(u,v\right)=f\left(v,u\right)$, ונקראת אנטי־סימטרית אם $f\left(u,v\right)=-f\left(v,u\right)$.

בהנתן בסיס B, לתבנית בי־לינארית קיימת מטריצה מייצגת A, כך שמתקיים

$$f\left(u,v\right)=\left[v\right]_B^T A\left[u\right]_B$$

למשל, בדוגמה הראשונה קודם,

$$A=\begin{pmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{pmatrix}$$

באופן כללי, אם A מייצגת את $f\left(u,v\right)$, אזי A^t מייצגת את $f\left(v,u\right)$.

דוגמא

$$f\left(\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}\right)=\left(x_1+y_1\right)^2-\left(x_1-y_1\right)^2=4x_1y_1$$

הגדרה 1.2 מטריצות A,B נקראות חופפות אם הן מייצגות את אותה התבנית. באופן שקול, קיימת P הפיכה כך שמתקיים

$$\begin{aligned}v^tBu &= \left(Pv\right)^tA\left(Pu\right)=v^tP^tAPu\\B &= P^tAP\end{aligned}$$

הערה 1.3 אם A,B חופפות מעל שדה גדול יותר K, הן לא בהכרח חופפות מעל F.

דוגמא מעל $\mathbb{R}$, נגדיר

$$\begin{aligned}f\left(x_1,y_1\right) &= x_1y_1, A=\begin{pmatrix}1\end{pmatrix}\\f\left(x_1,y_1\right) &= -x_1y_1, A=\begin{pmatrix}-1\end{pmatrix}\end{aligned}$$

לא יכולות להיות חופפות מעל $\mathbb{R}$, כי הדטרמיננטות מסימנים שונים, והמנה בין הדטרמיננטות של מטריצות חופפות חייבת להיות ריבוע. לעומת זאת, מעל $\mathbb{C}$, מתקיימת חפיפה, עם המטריצה $\begin{pmatrix}i\end{pmatrix}$.

דוגמא האם $x_1'y_2'+x_2'y_1'$, $x_1y_1-x_2y_2$ חופפות מעל $\mathbb{R}$? הראשונה מיוצגת על ידי $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, והשנייה על ידי $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. נגדיר את ההעתקה הלינארית:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{x_1'+x_2'}{\sqrt{2}} \\ x_2 &= \frac{x_1'-x_2'}{\sqrt{2}} \\ y_1 &= \frac{y_1'+y_2'}{\sqrt{2}} \\ y_2 &= \frac{y_1'-y_2'}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

וכעת, הצבה תיתן

$$x_1y_1-x_2y_2=\frac{\left(x_1'+x_2'\right)\left(y_1'+y_2'\right)}{2}-\frac{\left(x_1'-x_2'\right)\left(x_1'+x_2\right)}{2}=x_1'y_2'+x_2'y_1'$$

דוגמא $x_1y_1-x_2y_2$, $2\left(x_1'y_2'+x_2'y_1'\right)$ חופפות מעל $\mathbb{Q}$.

משפט 1.4 במציין שאינו 2, כל תבנית סימטרית חופפת לתבנית אלכסונית (מיוצגת על ידי מטריצה אלכסונית), כלומר

$$f\left(x,y\right)=c_1x_1y_1+\cdots+c_nx_ny_n$$

משפט 1.5 מעל $\mathbb{R}$, כל תבנית סימטרית חופפת לתבנית

$$D_{p,q}=x_1y_1+\cdots+x_py_p-x_{p+1}y_{p+1}-\cdots-x_{p+q}y_{p+q}$$

משפט 1.6 (ההתמדה) $D_{p,q}$, $D_{r,s}$ חופפות אם ורק אם $p=r, q=s$.

הגדרה 1.7 הסיגנטורה (סימן) של תבנית בי־לינארית סימטרית מעל $\mathbb{R}$ מוגדרת, כאשר התבנית חופפת לתבנית $D_{p,q}$,

$$\sigma\left(D_{p,q}\right)=p-q$$

הגדרה 1.8 הדרגה של תבנית כזו:

$$\mathrm{rk}\left(D_{p,q}\right)=p+q$$

הגדרה 1.9 תבנית סימטרית f מעל $\mathbb{R}$ נקראת חיובית אם לכל v מתקיים $f(v,v) \geq 0$.
היא נקראת חיובית ממש אם לכל v מתקיים $f(v,v) > 0$.

משפט 1.10 תהא f תבנית בי־לינארית על מרחב וקטורי V מעל $\mathbb{R}$, שמיוצגת על ידי A מעל בסיס כלשהו. התנאים הבאים שקולים:

1. f חיובית לחלוטין.
2. A חופפת למטריצה $\operatorname{diag}(c_1,\ldots,c_n)$, כאשר $c_i > 0$.
3. A חופפת למטריצה I.
4. $A = P^T P$ עבור P הפיכה וממשית.

הוכחה: 1 ⇐2 : A חופפת למטריצה אלכסונית כלשהי $\operatorname{diag}(c_1,\ldots,c_n)$, לפי משפט כללי.
כשנציב את איברי הבסיס המתאים נקבל $f(u_i,u_i) = c_i$, ולכן $c_i > 0$.
2 ⇐3: נבחר $P = \operatorname{diag}\left(\sqrt{c_1},\ldots,\sqrt{c_n}\right)$, ונקבל $P^T I P = \operatorname{diag}(c_1,\ldots,c_n)$.
3 ⇔4: מהגדרה.
4 ⇐1: נציב

$$f(u,u) = u^T A u = u^T P^T P u = (Pu)^T (Pu) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 > 0$$

ולכן f חיובית לחלוטין. ∎

משפט 1.11 תהא f תבנית סימטרית מעל $\mathbb{R}$. נתבונן בסדרת המינורים

$$A_i = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1i} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \ldots & a_{ii} \end{pmatrix}$$

ובסדרת הדטרמיננטות:

$$1, \det A_1, \ldots, \det A_n$$

ונניח כי אינן מתאפסות.
אזי, f חופפת לתבנית $D_{p,q}$, כאשר p הוא מספר הזוגות $\det A_i, \det A_{i+1}$ בהם נשמר הסימן, וכן q מספר הזוגות בהם מתהפך הסימן.

הוכחה: נניח כי f מיוצגת על ידי

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

בהכרח $a_{11} \neq 0$, שכן $a_{11} = \det A_1 \neq 0$. על ידי פעולות חפיפה נעבור למטריצה

$$A' = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a'_{22} & \dots & a'_{2n} \\ 0 & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a'_{n2} & \dots & a'_{nn} \end{pmatrix}$$

כמובן שלא שינינו את הדטרמיננטות, והמטריצה עדיין סימטרית. נוכל להמשיך באותו אופן ולקבל חפיפה למטריצה

$$C = \begin{pmatrix} c_1 & & \\ & \ddots & \\ & & c_n \end{pmatrix}$$

וזו בוודאי חופפת למטריצה

$$C' = \begin{pmatrix} \operatorname{sgn}(c_1) & & \\ & \ddots & \\ & & \operatorname{sgn}(c_n) \end{pmatrix}$$

שחופף למטריצה $D_{p,q}$ מסויימת על ידי החלפה של שורות ועמודות, כאשר p הוא מספר האיברים c_i החיוביים, שמציינים איפה הסימן של הדטרמיננטה נשמר, וכן q הוא מספר האיברים c_i השליליים, שמציינים איפה הסימן של הדטרמיננטה מתהפך. ■

דוגמא

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 4 & 17 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} \\ \det A_1 &= 1 \\ \det A_2 &= 1 \\ \det A_3 &= -87 \end{aligned}$$

לכן A חופפת למטריצה $D_{2,1}$. נבצע פעולות עמודה ושורה ונגיע לכדי

$$A \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 3 & -9 & -6 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -9 & -6 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -87 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

מסקנה 1.12 A חיובית לחלוטין אם ורק אם $\det A_i > 0$ לכל i.

הוכחה: כיוון אחד נובע מיידית, אם התנאי על הדטרמיננטות מתקיים אזי A חופפת למטריצה $D_{n,0}=I$.

בכיוון השני, נבצע את אותו תהליך שביצענו במשפט, ניווכח שכיוון שהתבנית A חיובית לחלוטין, תמיד $a'_{ii}>0$. לכן, נגיע בסוף לצורה אלכסונית שבה כל האיברים חיוביים באלכסון, ולכן הדטרמיננטות של המינורים שם חיוביות ־ אבל בתהליך לא שינינו את הדטרמיננטות, ולכן הן היו חיוביות ממש מלכתחילה. ■

טענה 1.13 (קודמת) A חיובית לחלוטין אזי $\det A>0$, שכן $\det A=\det P^T\det P=(\det P)^2$.

הגדרה 1.14 תבנית בי־לינארית f נקראת לא מנוונת אם לכל $0\neq v\in V$ קיים $u\in V$ כך שמתקיים $f(u,v)\neq 0$.

דוגמא תבנית לא מנוונת

$$f\left(\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}\right)=x_1y_1+x_2y_2$$

דוגמא תבנית מנוונת

$$f\left(\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}\right)=(x_1+x_2)(y_1+y_2)$$

שכן הווקטור $\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ בקואורדינטה הראשונה מאפס את התבנית בלי תלות בווקטור השני.

משפט 1.15 יהא V מרחב ווקטורי מעל F ממציין שאינו 2, $f\in B(V,V)$ אנטי סימטרית לא מנוונת. אזי f חופפת למטריצה

$$\begin{pmatrix} & & & & & 1\\ & & & & \iddots & \\ & & & 1 & & \\ & & -1 & & & \\ & \iddots & & & & \\ -1 & & & & & \end{pmatrix}$$

הוכחה: בתרגיל בית, נוכיח שאם n אי זוגי, f בהכרח מנוונת. עבור הזוגיים, נוכיח באינדוקציה על n. יהא v כלשהו, יהא u כך שמתקיים $f(u,v)\neq 0$ (קיים כי f לא מנוונת). בלי הגבלת הכלליות, ניתן להניח כי $f(u,v)=1, f(v,u)=-1$. נשים לב כי u,v חייבים להיות בלתי תלויים (אחרת אחד מהם כפולה סקלרית של השני ומקבלים $f(u,v)=0$). נגדיר

$$\begin{aligned}W_1&=\operatorname{span}\{u,v\}\\W_2&=\{w\in V\mid f(w,u)=f(w,v)=0\}\end{aligned}$$

נראצה להוכיח שמתקיים $V = W_1 \oplus W_2$. אם $w \in W_1 \cap W_2$, אזי $W = au + bv$, ולכן

$$\begin{aligned} 0 &= f(w,u) = f(au+bv,u) = -b \\ 0 &= f(w,v) = f(au+bv,v) = a \end{aligned}$$

לכן $a = b = 0$ ולכן $w = 0$, והחיתוך הוא $\{0\}$.

כעת יהא w כללי. נרצה למצוא $w_1 \in W_1, w_2 \in W_2$ כך שמתקיים $w = w_1 + w_2$. נגדיר

$$\begin{aligned} w_1 &= au+bv, a = f(w,v), b = -f(w,u) \\ w_2 &= w - w_1 \end{aligned}$$

בבירור, $w_1 \in W_1$, וכן

$$\begin{aligned} f(w_2,u) &= f(w,u) - f(w_1,u) = 0 \\ f(w_2,v) &= f(w,v) - f(w_1,v) = 0 \end{aligned}$$

ולכן נקבל גם $w_2 \in W_2$. לכן קיבלנו $V = W_1 \oplus W_2$.

כעת, ברור שהמטריצה המייצגת של f מעל W_1 היא $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ עבור הבסיס $\{u,v\}$. המרחב W_2 הוא ממימד קטן בשתיים, וכאשר נצמצם את f עליו נקבל תבנית בי־לינארית אנטי סימטרית. נותר רק להוכיח שהיא לא מנוונת עליו כדי להפעיל את הנחת האינדוקציה ולסיים.

אם קיים $w \in W_2$ כך שמתקיים $f(w,w') = 0$ לכל $w' \in W_2$, אזי גם $f(w,w'') = 0$ לכל $w'' \in V$, כי $w'' = w_1 + w_2$, כאשר $w_2 \in W_2$ וכן $w_1 = au + bv$, ולכן $f(w, au+bv+w_2) = af(w,u) + bf(w,v) + f(w,w_2)$ וזה מתאפס משום שהווקטור $w \in W_2$, ולכן $f(w,u) = f(w,v) = 0$, וכן הנחנו כי עבור w התבנית על W_2 מנוונת, ולכן $f(w,w_2) = 0$. קיבלנו סתירה לכך שהתבנית f אינה מנוונת על כל המרחב V.

לכן כאשר נצטצמם על W_2 נקבל מטריצה מהצורה שרצינו, וכשנוסיף את u,v נקבל את מה שביקשנו להוכיח. ■