אלגברה לינארית 2א

ⓒ ארזים

12 באפריל 2016

1 תבניות בי־לינאריות

הגדרה 1.1 יהי V מרחב ווקטורי מעל שדה F, $\text{char}F \neq 2$. פונקציונאל בי־לינארי הוא העתקה

$$\xi : V \times V \to F$$

המקיימת

$$\begin{aligned} \forall v, u, u' &\in V, \alpha \in F \\ \xi\left(u + u', v\right) &= \xi\left(u, v\right) + \xi\left(v, u\right) \\ \xi\left(\alpha u, v\right) &= \alpha \xi\left(u, v\right) \\ \xi\left(v, u + u'\right) &= \xi\left(v, u\right) + \xi\left(v, u'\right) \\ \xi\left(v, \alpha u\right) &= \alpha \xi\left(v, u\right) \end{aligned}$$

תכונות:

1. פונקציונאל בי־לינארי הוא סימטרי אם

$$\forall u, v \in V \;\; \xi\left(u, v\right) = \xi\left(v, u\right)$$

2. פונקציונאל בי־לינארי הוא אנטי־סימטרי אם

$$\forall u, v \in V \;\; \xi\left(u, v\right) = -\xi\left(v, u\right)$$

3. פונקציונאל בי־לינארי סימטרי הוא לא מנוון אם

$$\forall u \neq 0 \in V \;\; \exists v \in V : \;\; \xi\left(u, v\right) \neq 0$$

דוגמאות:

1. $F=\mathbb{R}$, $V=\mathbb{R}^2$, נגדיר

$$\xi\left(\begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix}\right)=u_1v_1-u_2v_2$$

סימטרי:

$$\xi\left(\begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix}\right)=u_1v_1-u_2v_2=\xi\left(\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix}\right)$$

וכן לא מנוון - ניתן למצוא ממש את הווקטור המתאים לכל ווקטור.

2. $F=\mathbb{R}$, $V=\mathbb{R}^2$, נגדיר

$$\xi\left(\begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix}\right)=u_2v_1-u_1v_2$$

אנטי-סימטרי, מתכונות של דטרמיננטה, וכן לא מנוון - שוב, ניתן ממש למצוא ווקטור.

3. $F=\mathbb{R}$, $V=\mathbb{R}^n$ ונגדיר

$$\xi\left(u,v\right)=u^T\cdot v$$

הלינאריות מתקבת מתכונות של כפל מטריצות. סימטרי, לא מנוון.

4. $F=\mathbb{R}$, $V=\mathbb{R}^n$, ניקח $A\in M_n\left(\mathbb{R}\right)$ ונגדיר

$$\xi\left(u,v\right)=u^TAv$$

במקרה הכללי לא ניתן להבטיח סימטריות, אנטי-סימטריות או ניוון - כל התכונות הללו תלויות בתכונות של A.

5. F שדה עם $\mathrm{char}F\neq 2$, $V=F^n$, ניקח $T:V\to V^*$ ונגדיר

$$\xi\left(u,v\right)=\left(T\left(u\right)\right)\left(v\right)$$

במקרה הכללי לא ניתן להבטיח סימטריות, אנטי-סימטריות או ניוון - כל התכונות הללו תלויות בתכונות של T.

נתמקד בדוגמה 4.

טענה 1.2 כל פונקציונאל ξ ניתן להציג בתור $\xi\left(u,v\right)=u^TAv$ עבור $A\in M_n\left(F\right)$

הוכחה: ניקח $B=\{b_1,\dots,b_n\}$ בסיס של V, ונגדיר $A_{i,j}=\xi\left(b_i,b_j\right)$. נראה שאכן מתקיים:

$$\xi\left(u,v\right)=\left[u^T\right]_B\cdot A\left[v\right]_B$$

מההגדרה

$$\xi\left(b_i,b_j\right)=\left[b_i^T\right]_B\cdot A\left[b_j\right]_B=e_i^T\cdot A\cdot e_j=A_{i,j}$$

בתרגיל בית נסיק מלינאריות שהדבר נכון לכל u,v. ■

שאלה מתי שתי מטריצות מייצגות אותה העתקה בי־לינארית בבסיסים שונים?

פתרון נניח כי A_B, A_C מייצגות את ההעתקה ξ לפי בסיסים B,C בהתאמה. ניקח $P=\left[Id\right]_C^B$ ונטען

$$\xi\left(u,v\right)=\left[u^T\right]_B A_B\left[v\right]_B=\left[u^T\right]_B P^TA_CP\left[v\right]_B$$

ואכן, $P\left[v\right]_B=\left[v\right]_C$, וכן

$$\left[u^T\right]_B P^T=\left(P\left[u\right]_B\right)^T=\left[u^T\right]_C$$

ולכן

$$\left[u^T\right]_B P^TA_CP\left[v\right]_B=\left[u^T\right]_C A_C\left[v\right]_C$$

2 צורת ז'ורדן

בלוק ז'ורדן:

$$J_k\left(\lambda\right)=\begin{pmatrix}\lambda & 1 & & \\ & \lambda & \ddots & \\ & & \ddots & 1\\ & & & \lambda\end{pmatrix}$$

מטריצת ז'ורדן:

$$J=\operatorname{diag}\left(J_{k_1}\left(\lambda_1\right),\dots,J_{k_m}\left(\lambda_m\right)\right)$$

משפט 2.1 (משפט ז'ורדן) יהי V מרחב וקטורי מעל F, ותהי $T:V\to V$ טרנספורמציה לינארית. אזי אם f_Tמתפרק למכפלת גורמים לינאריים קיים בסיס B בו $\left[T\right]_B$ היא מצורת ז'ורדן, והיא יחידה עד כדי סדר הבלוקים.

2.1 איך מוצאים צורת ז'ורדן?

1. הריבוי האלגברי של λ הוא מספר הפעמים שהוא יופיע על האלכסון - כלומר סך הגדלים של הבלוקים שמתאימים לו.

2. הריבוי הגיאומטרי של λ הוא כמות הבלוקים שמתאימים לו.

3. כמות הבלוקים של λ מגודל k לפחות הוא $\dim\ker\left(T-\lambda I\right)^{k}-\dim\ker\left(T-\lambda I\right)^{k-1}$.

4. גודל הבלוק המקסימלי של λ הוא החזקה של $(x-\lambda)$ בפולינום המינימלי.

תרגיל $A\in M_3\left(F\right)$ נילפוטנטית. הראו כי הריבוי הגיאומטרי של 0 קובע את צורת זו'רדן של A.

פתרון מהנתון, $\lambda=0$ הוא הערך העצמי היחיד, הריבוי האלגברי שלו הוא 3. אם הריבוי הגיאומטרי הוא 1, יש בלוק זו'ורדן יחיד ואז צורת ז'ורדן היא

$$\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

אם הריבוי הגיאומטרי הוא 2, יש שני בלוקי ז'ורדן, והאפשרות היחידה לצורת ז'ורדן היא

$$\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

אם הריבוי הגיאומטרי הוא 3, יש שלושה בלוקים, ואז

$$A=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

2.2 איך מוצאים בסיס ז'ורדן?

נטפל בכל ערך עצמי בנפרד, נמצא עבורו קבוצה בלתי תלוייה לינארית, ובסוף נאחד את כל הקבוצות. נחפש את הקבוצה ההבלתי תלוייה המתאימה עבור λ עם ריבוי אלגברי m.

1. נחפש k כך שמתקיים

$$\dim\ker\left(A-\lambda I\right)^{k}=m$$

זוהי למעשה החזקה של $(x-\lambda)$ בפולינום המינימלי.

2. נגדיר $m_j=\dim\ker\left(A-\lambda I\right)^{j}-\dim\ker\left(A-\lambda I\right)^{j-1}$.

3. עבור k נבחר m_k וקטורים בלתי תלויים מתוך

$$\ker\left(A-\lambda I\right)^{k}\setminus\ker\left(A-\lambda I\right)^{k-1}$$

ונסמנם $v_1,\dots,v_{m_k}$.

4. עבור $k-1$, ניקח את

$$\left(A-\lambda I\right)v_1,\dots,\left(A-\lambda I\right)v_{m_k}$$

ואם עדיין אין m_{k-1} וקטורים, נשלים שרירותית מתוך $\ker\left(A-\lambda I\right)^{k-1}\setminus\ker\left(A-\lambda I\right)^{k-2}$ לקבוצה בלתי־תלויה בגודל m_{k-1}.

5. ממשיכים באותו אופן עד 1.

6. לבסוף נסדר את הקבוצה בשרשראות:

$$\left(A-\lambda I\right)^{k}v_1,\left(A-\lambda I\right)^{k-1}v_1,\dots,v_1,\dots,\left(A-\lambda I\right)^{m}v_j,\dots,v_j,\dots$$

דוגמא מצאו צורת ובסיס ז'ורדן עבור

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 0 & 0\\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

פתרון נחפש פולינום אופייני ונמצא

$$f_A\left(x\right)=x^5$$

לכן, יש ערך עצמי יחיד, $\lambda=0$.
נתחיל בלחשב את הגרעין של חזקות של $\left(A-\lambda I\right)$.

$$\begin{aligned}\ker A &= \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\ -1\\ 0\\ 0\\ 0\end{pmatrix},e_5\right\}\\ \ker A^2 &= \operatorname{span}\left\{e_1,e_2,e_4,e_5\right\}\\ \ker A^3 &= \mathbb{R}^5\end{aligned}$$

מכאן נקבל שיש שני בלוקי ז'ורדן, והבלוק הגדול ביותר הוא מגודל 3, לכן צורת ז'ורדן היא

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & 0 & & \\ & & & 0 & 1 \\ & & & & 0 \end{pmatrix}$$

נחפש את הבסיס המתאים. נתחיל עם $j=3$, $m_j=1$. לכן נבחר וקטור אחד מתוך $\ker A^3 \setminus \ker A^2$, לדוגמא $v_1=e_3$.
עבור $j=2$, $m_j=2$. אז ניקח את הווקטור $Ae_3=e_4$, אבל אנחנו צריכים שני וקטורים, אז נבחר באופן שרירותי מתוך $\ker A^2 \setminus \ker A$, למשל $v_2=e_2$.
עבור $j=1$, $m_j=2$. אז ניקח את $Ae_4=e_5, Ae_2=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\\0\end{pmatrix}=e_1-e_2$. נשאר לסדר את הווקטורים:

$$\{e_5,e_4,e_3,e_1-e_2,e_2\}$$

שאלה מצאו בסיס וצורת ז'ורדן עבור

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

פתרון הפולינום האופייני הוא

$$f_A(x)=(x-1)^2(x-2)^3$$

נטפל בערכים העצמיים בנפרד.
עבור $\lambda=1$: יתאימו שני וקטורים.

$$\begin{aligned} \ker(A-I) &= \operatorname{span}\{e_5\} \\ \ker(A-I)^2 &= \operatorname{span}\{e_4,e_5\} \end{aligned}$$

נתחיל עם $j=2$, $m_j=1$, נבחר שרירותית וקטור מתוך $\ker(A-I)^2 \setminus \ker(A-I)$ - ניקח את e_4.

עבור $j=1$, $m_j=1$, ניקח את $(A-I)\,e_4=e_5$.
לכן הסדרה שמתאימה לערך העצמי $\lambda=1$ היא $\{e_5,e_4\}$.
נעבור לטפל במקרה של $\lambda=2$.

$$\begin{aligned}\ker\left(A-2I\right) &= \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix}0\\2\\-1\\3\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\-1\\2\\0\\3\end{pmatrix}\right\}\\ \ker\left(A-2I\right)^2 &= \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix}-3\\1\\1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\-1\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}\end{aligned}$$

נתחיל עם $j=2$, $m_j=1$, נבחר שרירותית את $v_3=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\1\\0\end{pmatrix}$.
עבור $j=1$, $m_j=2$, ניקח את $(A-2I)\,v_3$, ועוד ווקטור v_4 מתוך $\ker\left(A-2I\right)^2\setminus\ker\left(A-2I\right)$.
בסך הכל נקבל שבסיס ז'ורדן הוא

$$\{v_4,(A-2I)\,v_3,v_3,e_5,e_4\}$$