אלגברה לינארית 2א

ⓒ ארזים

5 באפריל 2016

ראינו כי עבור טרנספורמציה נילפוטנטית ציקלית, קיים v כלשהו כך שהקבוצה

$$B = \{v, Tv, \dots, T^r v\}$$

היא בסיס, וכן $T^{r+1} \equiv 0$. כלומר

$$[T]_B = \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ 1 & 0 & & & \\ & 1 & 0 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

אם ניקח את הבסיס בסדר הפוך, נקבל שהמטריצה זהה רק שהאחדים הם מעל האלכסון.
מקרה כללי הוא <u>בלוק ז'ורדן</u>:

$$J_{n,\lambda} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & & \\ & \lambda & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & \lambda \end{pmatrix}$$

כאשר n הוא מימד המטריצה. כעת, מתקיים

$$f_{J_{n,\lambda}} = m_{J_{n,\lambda}} = (x-\lambda)^n$$

וכן קיים בסיס $\{v_1, \dots, v_n\}$ כך שמתקיים.

$$Tv_1 = \lambda v_1$$

ולכל $i > 1$

$$Tv_i = \lambda v_i + v_{i-1}$$

כלומר מתקיים

$$[T]_{\{v_1,\ldots,v_n\}}=J_{n,\lambda}$$

<u>דוגמא:</u>

$$\begin{pmatrix}(0) &&&&&&& \\ & \begin{pmatrix}0&1\\&0\end{pmatrix} &&&&&& \\ && (1) &&&&& \\ &&& (1) &&&& \\ &&&& \begin{pmatrix}2&1\\&2\end{pmatrix} &&& \\ &&&&& (3) && \\ &&&&&& (3) & \\ &&&&&&& \begin{pmatrix}3&1&\\&3&1\\&&3\end{pmatrix}\end{pmatrix}$$

<u>דוגמא נוספת:</u> יהי $T:V^3\to V^3$, ויהי בסיס $B=\{u,v,w\}$. נניח כי

$$T(u)=v,T(v)=-u,T(w)=2u+w$$

כעת,

$$\begin{aligned}A &= [T]_B=\begin{pmatrix}0&-1&2\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\\ f_A(x) &= \det(xI-A)=\begin{vmatrix}x&1&-2\\-1&x&0\\0&0&x-1\end{vmatrix}=(x-1)\begin{vmatrix}x&1\\-1&x\end{vmatrix}=\\ &= (x-1)\left(x^2+1\right)=(x-1)(x-i)(x+i)\end{aligned}$$

נרצה למצוא את בלוקי ז'ורדן.
אם נסמן $g_1(x)=x-1$, אזי נתבונן במרחב

$$\ker(g_1(A))=\ker(A-I)=\ker\begin{pmatrix}-1&-1&2\\1&-1&0\\0&0&0\end{pmatrix}=\operatorname{span}\{u+v+w\}$$

כעת $g_2(x)=x^2+1$.

$$\ker(g_2(A))=\ker\left(A^2+I\right)=\ker\begin{pmatrix}0&0&2\\0&0&2\\0&0&2\end{pmatrix}=\operatorname{span}\{u,v\}$$

כעת ממשפט הפירוק הפרימרי נקבל

$$V=\operatorname{span}\{u,v\}\oplus\operatorname{span}\{u+v+w\}$$

זוהי צורה כסכום של אי־פריקים מעל $\mathbb{R}$ ־ מעל $\mathbb{C}$ ניתן היה להמשיך לפרק את g_2, אך בממשיים הוא עצמו לא פריק.

<u>דוגמה נוספת:</u>

$$A=\begin{pmatrix}3&1&-2\\1&2&-1\\1&1&0\end{pmatrix}$$

מטרה: לז'רדן.

$$\begin{aligned}f_A(x)&=\det(xI-A)=\begin{vmatrix}x-3&-1&2\\-1&x-2&1\\-1&-1&x\end{vmatrix}=(x-3)(x-2)x+1+2+(x-3)-x+2(x-2)=\\&=x^3-5x^2+8x-4=(x-1)\left(x^2-4x+4\right)=(x-1)(x-2)^2\end{aligned}$$

לכן נוכל לפרק את המרחב באופן הבא:

$$\mathbb{R}^3=V_1\oplus\widetilde{V}_2=\ker(A-I)\oplus\ker\left((A-2I)^2\right)$$

לעומת זאת, לא ברור אם יתקיים

$$\mathbb{R}^3=V_1\oplus V_2=\ker(A-I)\oplus\ker(A-2I)$$

כעת,

$$\begin{aligned}\ker(A-I)&=\ker\begin{pmatrix}2&1&-2\\1&1&-1\\1&1&-1\end{pmatrix}=\operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right\}\\\ker(A-2I)&=\ker\begin{pmatrix}1&1&-2\\1&0&-1\\1&1&-2\end{pmatrix}=\operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right\}\\\ker\left((A-2I)^2\right)&=\ker\begin{pmatrix}0&-1&1\\0&0&0\\0&-1&1\end{pmatrix}=\operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right\}\end{aligned}$$

נחפש ווקטורי בסיס כך שנקבל

$$A\sim\begin{pmatrix}2&1&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

נבחר וקטורי בסיס $w = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$, $u = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, שהם וקטורים עצמיים. כעת נחפש וקטור v כך שנקבל את הייצוג המטריציוני שלעיל, כלומר

$$
\begin{aligned}
Av &= 2v + \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \\
(A-2I)\,v &= \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix}1 & 1 & -2\\1 & 0 & -1\\1 & 1 & -2\end{pmatrix} v &= \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

כמובן שהווקטור $v = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ הוא פיתרון. כעת נבחר

$$P = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\1 & 0 & 0\\1 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

ונקבל

$$A = P\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\0 & 2 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}P^{-1}$$

<u>שתי שיטות למציאת בסיס מז'רדן:</u>
נניח כי לטרנספורמציה T יש רק את הערך העצמי λ. נעבוד בעיקר עם $T-\lambda$. נניח תחילה כי מדובר בבלוק ציקלי, כלומר $\dim\ker(T-\lambda)=1$.
<u>שיטה 1:</u> נמצא $u_1 \in \ker(T-\lambda)$, כלומר נפתור $(T-\lambda \mid 0)$, כלומר $Tu_1 = \lambda u_1$. הווקטור הבא צריך לקיים $Tu_2 = \lambda u_2 + u_1$, כלומר יש לפתור את $(T-\lambda \mid u_1)$. נמשיך באותה צורה ונקבל לכל i כי $Tu_{i+1} = \lambda u_{i+1} + u_i$, כלומר u_{i+1} הוא פתרון של $(T-\lambda \mid u_i)$.
<u>שיטה 2:</u> נניח כי $(T-\lambda)^n = 0$ אבל $(T-\lambda)^{n-1} \neq 0$. לכן קיים $u_n \in \ker\left((T-\lambda)^n\right) \setminus \ker\left((T-\lambda)^{n-1}\right)$, וכעת נגדיר $u_{n-k} = (T-\lambda)^k u_n$, או באופן שקול $u_{k-1} = (T-\lambda)\,u_k$. לכן, אם ניקח

$$u = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i$$

כאשר $\alpha_k \neq 0$, ולכל $j > k$ מתקיים $\alpha_j = 0$, ונפעיל על וקטור זה את $(T-\lambda)^{k-1}$, נקבל

$$(T-\lambda)^{k-1} u = \alpha_k u_1 \neq 0$$

דוגמא:

$$\begin{aligned}
A &= \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\
f_A(x) &= (x-2)^2(x-1) \\
\ker(g_1(A)) &= \ker\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\} \\
\ker(g_2(A)) &= \ker\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}
\end{aligned}$$

לכן קיבלנו שהפעם המטריצה אכן לכסינה, כאשר

$$A = P\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}P^{-1}, P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

דוגמא אחרונה:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -3 & -3 \end{pmatrix}$$

נשים לב שזוהי מטריצה מלווה של פולינום, ולכן הוא הפולינום המינימלי והאופייני שלה, ולכן

$$f_A(x) = m_A(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = (x+1)^3$$

משום שאנחנו יודעים את הפולינום המינימלי, נוכל להסיק ישירות את צורת ז'ורדן של המטריצה:

$$A \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

למעשה, ניתן להסיק כי הפולינום המינימלי שווה פולינום האופייני אם ורק אם לכל ערך עצמי יש בלוק ז'ורדן יחיד, כלומר אם ורק אם כל בלוק ז'ורדן הוא מקסימלי, כלומר כל $\widetilde{V}_\lambda$ עבור λ המתאים.

$$
\begin{aligned}
A+I &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -3 & -2 \end{pmatrix} \\
(A+I)^2 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \\
(A+I)^3 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

נוכל להתחיל על ידי $w = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, וכעת $v = (A+I)\,w$, $u = (A+I)\,v$ ונקבל בסיס מז'רדן בשיטה השנייה; לעומת זאת נוכל להתחיל עם $u = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, למצוא v כך שמתקיים $(A+I)\,v = u$, ולמצוא w כך שמתקיים $(A+I)\,w = v$, ולמצוא בסיס מז'רדן בשיטה השנייה.