# <u>אלגברה לינארית 2א</u>



22 במרץ 2016

## 1 הערות על תרגילי בית

טעות נפוצה ־ זה שלמטריצה יש פחות ערכים עצמיים מאשר המימד שלה, $n$, לא גורר שהיא אינה לכסינה ־ את זה מראים לפי ריבוי הערכים העצמיים.
כמו כן, בשאלה 6 בתרגיל 1, הדרך הנפוצה הייתה

$$\begin{aligned} ABv &= \lambda v \\ \lambda v = u \quad \Rightarrow \quad & BAu = BABv = B(\lambda v) = \lambda u \end{aligned}$$

אבל מה אם $u=0$? צריך להסביר שזה לא אפשרי כי $v \neq 0$ (ווקטור עצמי) וכן $\lambda \neq 0$ (נתון של השאלה).
כמו כן, אין סיבה להפוך מטריצה $2 \times 2$ על ידי דירוג ־ יש נוסחה פשוטה:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

כמו כן, לשים לב לא לחלק באפס.

## 2 חילוק עם שארית בשלמים הגאוסיאנים

**משפט 2.1** לכל $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}[i]$, כאשר $\beta \neq 0$, קיימים $q, r \in \mathbb{Z}[i]$ כך שמתקיים

$$\alpha = q \cdot \beta + r$$

כאשר $||r|| < ||\beta||$.

**הוכחה:** נתבונן במספר המרוכב

$$\frac{\alpha}{\beta} = x_0 + iy_0$$

כעת קיימים שלמים $x, y \in \mathbb{Z}$ כך שמתקיים

$$|x - x_0|, |y - y_0| < \frac{1}{2}$$

מבחינה גיאומטרית, השלמים הגאוסיאנים הם למעשה סריג במישור המרוכב, שמחלק אותו לריבועים בעלי אורך צלע 1. $x_0 + iy_0$ נמצא בתוך ריבוע כלשהו, אז ניקח את הפינה הכי קרובה אליו של הריבוע הזה.
נסמן $q = x + iy$, וכעת

$$\left|\left|\frac{\alpha}{\beta} - q\right|\right| = ||(x - x_0) + i(y - y_0)|| = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \leq \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} < 1$$

נבחר $r = \alpha - q\beta$ ונקבל

$$||r|| = ||\alpha - q\beta|| = \left|\left|\frac{\alpha}{\beta} - q\right|\right| \cdot ||\beta|| < ||\beta||$$

וכעת $q, r$ עומדים בדרישות המשפט. ■

כתוצאה מן המשפט הזה יש לנו את אלגוריתם אוקלידס בשלמים הגאוסיאניים. למשל:

$$\begin{aligned}
\gcd(13, 5+i) &= 1+i \\
q_1 = \frac{13}{5+i} = \frac{13(5-i)}{26} &= 2 + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\right) \\
r_1 = 13 - 2(5+i) &= 3 - 2i \\
q_2 = \frac{5+i}{3-2i} = \frac{(5+i)(3-2i)}{13} &= \frac{13+13i}{13} = 1+i \\
r_2 &= 0
\end{aligned}$$

דוגמא נוספת: נרצה לכתוב את 29 כסכום ריבועים. נניח ששמנו לב שמתקיים $12^2 + 1 = 5 \cdot 29 = 145$, ולכן יש לנו מספר, $12 + i$, שהנורמה שלו מתחלקת בראשוני 29 - כלומר יש לו גורם ראשוני שהנורמה שלו 29. לכן נחשב gcd שלו עם 29:

$$\begin{aligned}
\gcd(29, 12+i) &= 5 - 2i \\
q_1 = \frac{29}{12+i} = \frac{29(12-i)}{145} &= \frac{12-i}{5} = 2 + \left(\frac{2-i}{5}\right) \\
r_1 = 29 - 2 \cdot (12+i) &= 5 - 2i \\
q_2 = \frac{12+i}{5-2i} = \frac{(12+i)(5+2i)}{29} &= \frac{58+29i}{29} = 2+i
\end{aligned}$$

ולכן נסיק, ונשים לב שאנחנו צודקים,

$$29 = 5^2 + 2^2$$

דוגמה נוספת -

$$\begin{aligned}
\gcd(6+7i,4-3i) &= \gcd(4-3i,-i)=1\\
q_1=\frac{(6+7i)(4+3i)}{25} &= \frac{3+46i}{25}=2i+\left(\frac{3-4i}{25}\right)\\
r_1=\left(\frac{3-4i}{25}\right)\cdot(4-3i) &= \frac{-25i}{25}=-i\\
\gcd(6+7i,4+3i) &= -2+i\\
q_1=\frac{(6+7i)(4+3i)}{25} &= \frac{45+10i}{25}=2+\left(\frac{-5+10i}{25}\right)\\
r_1=6+7i-2(4+3i) &= -2+i\\
q_2=\frac{(4+3i)(-2-i)}{5} &= \frac{-5-10i}{5}=-1-2i
\end{aligned}$$

## 3 פולינום מינימלי

הפולינום המינימלי של מטריצה ריבועית או של טרנספורמציה לינארית הוא פולינום מתוקן בעל מעלה מינימלית שמאפס את המטריצה או ההעתקה. ראינו שאוסף כל הפולינומים שמאפסים את המטריצה או הטרנספורמציה היא אידאל, והפולינום המינימלי יוצר אותה. כמו כן, משום שהפולינום האופייני מאפס את המטריצה או הטרנספורמציה, נובע שהפולינום המינימלי מחלק את הפולינום האופייני.

**דוגמאות:**

.1

$$\begin{aligned}
D:p &\to p'\\
m_D(x) &= x^{n+1}
\end{aligned}$$

.2

$$\begin{aligned}
A &= \begin{pmatrix}\lambda & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda\end{pmatrix}\\
p_A(x) &= (x-\lambda)^n\\
m_A(x) &= (x-\lambda)
\end{aligned}$$

.3

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda \end{pmatrix} \\ p_A(x) &= (x-\lambda)^n \\ m_A(x) &= (x-\lambda)^n \end{aligned}$$

.4

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} A_1 & & \\ & \ddots & \\ & & A_k \end{pmatrix} \\ p_A(x) &= \prod_{i=1}^{k} p_{A_i}(x) \\ m_A(x) &= \operatorname{lcm}(m_{A_i}) \end{aligned}$$

בדוגמה זו, נוכל להקביל את המצב לטרנספורמציה ממרחב מסויים לעצמו שניתן לפרק לסכום ישר של תתי מרחבים כלשהם - במצב זה נוכל לפרק את הטרנספורמציה לסכום של פרנספורמציות שכל אחת מהן פועלת על תת מרחב אחר מן הסכום הישר.

יהי $p(x) = x^n + a_{n-1}x^n + \cdots + a_1x + a_0$ פולינום מתוקן כלשהו. אזי קיימת מטריצה $A$ כך שמתקיים $p = m_A$. למשל המטריצה המלווה של הפולינום:

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & \ddots & \ddots & -a_1 \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

בהינתן פולינומים $p, q$, מתי ייתכן שקיימת מטריצה $A$ כך שמתקיים $p = m_A, q = f_A$?

**הכרחי:**

1. $p \mid q$.
2. כל גורם אי פריק של $q$ מחלק גם את $p$ - שקול לכך שקיים טבעי $n$ כך שמתקיים $q \mid p^n$.