אלגברה לינארית 2א

ⓒ ארזים

8 במרץ 2016

1 פולינום אופייני

עבור

$$A=\begin{pmatrix}7 & 3\\ 4 & 11\end{pmatrix}$$

נתבונן בפולינום האופייני:

$$\begin{aligned}
f_A(x) &= \det(xI-A)=\det\begin{pmatrix}x-7 & -3\\ -4 & x-11\end{pmatrix}=\\
&= (x-7)(x-11)-12=x^2-18x+65\\
\lambda_{1,2} &= \frac{18\pm\sqrt{18^2-4\cdot 65}}{2}\\
\lambda_1+\lambda_2=18 \quad &, \quad \lambda_1\cdot\lambda_2=65
\end{aligned}$$

סך הכל, נקבל $\lambda_1=5,\lambda_2=13$. נחפש ווקטורים עצמיים:

$$\begin{aligned}
\ker(A-5I) &= \ker\begin{pmatrix}2 & 3\\ 4 & 6\end{pmatrix}=\operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix}3\\ -2\end{pmatrix}\right\}\\
\ker(A-13I) &= \ker\begin{pmatrix}-6 & 3\\ 4 & -2\end{pmatrix}=\operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix}\right\}
\end{aligned}$$

כעת מתקיים, עבור $P=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & -2\end{pmatrix}$,

$$\begin{aligned}
AP &= P\begin{pmatrix}13 & 0\\ 0 & 5\end{pmatrix}\\
P^{-1}AP &= \begin{pmatrix}13 & 0\\ 0 & 5\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

עבור מטריצה מסדר 2 כללית:

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \\ f_A(x) &= \det \begin{pmatrix} x-a & -b \\ -c & x-d \end{pmatrix} = (x-a)(x-d) - bc = \\ &= x^2 - (a+d)x + (ad-bc) = x^2 - \mathrm{tr}(x) \cdot x + \det A \end{aligned}$$

עבור שיקוף ביחס לישר שזוויתו מהציר θ:

$$\begin{aligned} A_\theta &= \begin{pmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{pmatrix} \\ f_{A_\theta}(x) &= x^2 - 1 \end{aligned}$$

נקבל ערכים עצמיים $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1$. נחפש ווקטורים עצמיים:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \cos 2\theta + 1 & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta + 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos^2\theta - \sin^2\theta + 1 & 2\sin\theta\cos\theta \\ 2\sin\theta\cos\theta & -\cos^2\theta + \sin^2\theta + 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} -2\sin^2\theta & 2\sin\theta\cos\theta \\ 2\sin\theta\cos\theta & -2\cos^2\theta \end{pmatrix}, v_1 = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \cos 2\theta - 1 & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta - 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 2\cos^2\theta & 2\sin\theta\cos\theta \\ 2\sin\theta\cos\theta & 2\sin^2\theta \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix} \end{aligned}$$

כעת, מטריצת סיבוב:

$$\begin{aligned} R_\theta &= \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \\ f_{R_\theta}(x) &= x^2 - 2\cos\theta + 1 \\ x_{1,2} &= \cos\theta \pm \sqrt{\cos^2\theta - 1} = \cos\theta \pm i\sin\theta = e^{\pm i\theta} \\ v_{1,2} &= \begin{pmatrix} 1 \\ \mp i \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ניקח דוגמה למטריצה מסדר 3:

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} -5 & 3 & 0 \\ -14 & 8 & 0 \\ -2 & 3 & 3 \end{pmatrix} \\ f_A(x) &= \det \begin{pmatrix} x+5 & -3 & 0 \\ 14 & x-8 & 0 \\ 2 & -3 & x-3 \end{pmatrix} = (x-3)\det \begin{pmatrix} x+5 & -3 \\ 14 & x-8 \end{pmatrix} = \\ &= (x-3)\left(x^2 - 3x + 2\right) = (x-3)(x-2)(x-1) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6 \end{aligned}$$

$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 2, \quad \lambda_3 = 3$

נתבונן בדוגמה הבאה:

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} -14 & 15 \\ -15 & 16 \end{pmatrix} \\ f_A(x) &= x^2-2x+1=(x-1)^2 \\ \lambda &= 1 \\ \ker\begin{pmatrix} -15 & 15 \\ -15 & 15 \end{pmatrix} &= \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\} \end{aligned}$$

עבור המטריצה:

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ f_A(x) &= x^2+1 \end{aligned}$$

2 פולינומים

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 4 & 11 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ f_A(x) &= x^2-18x+65, f_B(x)=x^2-x-1 \\ f_B(A) &= A^2-A-I=\begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 4 & 11 \end{pmatrix}^2-\begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 4 & 11 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\dots \\ f_A(B) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^2-18\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}-65I=\begin{pmatrix} 66 & -17 \\ -17 & 49 \end{pmatrix} \\ f_B(B) &= B^2-B-I=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ f_A(A) &= A^2-18A+65I=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

משפט קיילי־המילטון (בהמשך) אומר לנו שתמיד מתקיים

$$f_A(A)=0$$

כעת נעשה דבר דומה עבור טרנספורמציות. ניקח את D להיות טרנספורמציית הגזירה:

$$\begin{aligned}
q(x) &= x^3+17\\
q(D) &= D^3+17 : p\to p^{(3)}+17p\\
[D]_B &= \begin{pmatrix}0 & 1 & & & \\ & 0 & 2 & & \\ & & 0 & \ddots & \\ & & & \ddots & n \\ & & & & 0\end{pmatrix}\\
q([D]_B) &= [D]_B^3+17I = \begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 6 & & & & \\ & 0 & 0 & 0 & 24 & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & & \ddots & \ddots & \ddots & n(n-1)(n-2) \\ & & & & & \ddots & \ddots & 0 \\ & & & & & & \ddots & 0 \\ & & & & & & & 0\end{pmatrix}+17I=\\
&= \begin{pmatrix}17 & 0 & 0 & 6 & & & & \\ & 17 & 0 & 0 & 24 & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & & \ddots & \ddots & \ddots & n(n-1)(n-2) \\ & & & & & \ddots & \ddots & 0 \\ & & & & & & \ddots & 0 \\ & & & & & & & 17\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

באופן כללי לטרנספורמצייה T:

$$[q(T)]_B = q([T]_B)$$

ניקח את המטריצה:

$$
\begin{aligned}
A &= \begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \\
f_A\left(x\right) &= \left(x-1\right)\left(x-2\right)\left(x-3\right) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6 \\
f_A\left(A\right) &= \begin{pmatrix} 0 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 4 & 6 \\ 0 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A_1 A_2 A_3 \\
A_3 &= \begin{pmatrix} * \\ * \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A_2 A_3 = \begin{pmatrix} * \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A_1 A_2 A_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
e_1 &\to \operatorname{span}\left\{e_1\right\} \to \operatorname{span}\left\{e_1\right\} \to 0 \\
e_2 &\to \operatorname{span}\left\{e_1, e_2\right\} \to \operatorname{span}\left\{e_1\right\} \to 0 \\
e_3 &\to \operatorname{span}\left\{e_1, e_2\right\} \to \operatorname{span}\left\{e_1\right\} \to 0
\end{aligned}
$$