אלגברה לינארית 2א

© ארזים

31 במאי 2016

1 אופרטורים נורמליים, פירוק ספקטרלי

הגדרה 1.1 T נקראת נורמלית אם $TT^* = T^*T$.

דוגמאות צמודות לעצמן, אנטי־הרמיטיות, אוניטריות ועוד.

תרגיל $T = T_H + T_S$, כאשר $T_H = \frac{T+T^*}{2}$, $T_S = \frac{T-T^*}{2}$, T_H הרמיטית, T_S אנטי הרמיטית. T נורמלית אם ורק אם T_H, T_S מתחלפות.

הוכחה:

$$\begin{aligned} T_S T_H &= \frac{T-T^*}{2} \cdot \frac{T+T^*}{2} = \frac{T^2 - (T^*)^2 + TT^* - T^*T}{4} \\ T_H T_S &= \frac{T^2 - (T^*)^2 + T^*T - TT^*}{4} \\ T_H T_S &= T_S T_H \iff TT^* = T^*T \end{aligned}$$

■

מסקנה 1.2 T נורמלית אם ורק אם T_H, T_S ניתנים ללכסון אורתוגונלי סימולטני. זה שקול לפירוק הספקטרלי, לפי אותו בסיס שמלכסן את T_H, T_S. זה שקול לכך שהערכים העצמיים של T_H, T_S הם, בהתאמה, הערכים הממשיים והמדומים של הערכים העצמיים של T.

דוגמה עבור T אוניטרית, יהי v ווקטור עצמי: $Tv = e^{i\theta} v$. כעת

$$\begin{aligned} \left(T_H^2 - T_S^2\right) v &= \left(\cos^2\theta + \sin^2\theta\right) v = v \\ \left(T_H^2 - T_S^2\right) &= \left(\frac{T+T^*}{2}\right)^2 - \left(\frac{T-T^*}{2}\right)^2 = \frac{TT^* + T^*T}{2} = \frac{Id + Id}{2} = Id \end{aligned}$$

דוגמה

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 1 & & & 0 \end{pmatrix}$$

מייצגת את ההעתקה

$$T\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_2\\ \cdots\\ x_n\\ x_1\end{pmatrix}$$

מטריצה זו היא נורמלית, שכן היא אוניטרית:

$$A^*=\begin{pmatrix}0 & & & 1\\ 1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 0\end{pmatrix}=A^{-1}$$

כמו כן, העמודות הן פרמוטציה של הבסיס הסטנדרטי. כמו כן,

$$f_A\left(x\right)=x^n-1=\prod_{j=0}^{n-1}\left(x-\omega^j\right),\omega=e^{\frac{2\pi i}{n}}$$

הווקטור העצמי שמתאים לערך העצמי $\omega^k=\lambda_k$ הוא

$$v_{\omega^k}=\begin{pmatrix}1\\ \omega^k\\ \omega^{2k}\\ \vdots\\ \omega^{(n-1)k}\end{pmatrix},Tv_{\omega^k}=\begin{pmatrix}\omega^k\\ \omega^{2k}\\ \vdots\\ \omega^{(n-1)k}\\ 1=\omega^{nk}\end{pmatrix}=\omega^k v_{\omega^k}$$

וכעת

$$\left\langle v_{\lambda_1},v_{\lambda_2}\right\rangle=\sum_{j=0}^{n-1}\lambda_1^j\overline{\lambda_2}^j=\sum_{j=0}^{n-1}\left(\lambda_1\overline{\lambda_2}\right)^j=\begin{cases}n & \lambda_1=\lambda_2\\ 0 & \lambda_1\neq\lambda_2\end{cases}$$

לכן, אם ניקח

$$B=\left\{\frac{1}{\sqrt{n}}\begin{pmatrix}1\\ \omega^k\\ \omega^{2k}\\ \vdots\\ \omega^{(n-1)k}\end{pmatrix}\right\}_{k=0}^{n-1}$$

נקבל בסיס אורתונורמלי שמלכסן את A/T. מטריצת המעבר היא

$$U=\left(\omega^{ij}\right)_{i,j=0}^{n-1}$$

וכעת

$$A=U\begin{pmatrix}1 & & & \\ & \omega & & \\ & & \ddots & \\ & & & \omega^{n-1}\end{pmatrix}U^{-1}$$

דוגמה נתבונן במטריצה

$$\widetilde{A}=A_{\lambda_1,\ldots,\lambda_n}=\begin{pmatrix}\lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \ldots & \lambda_n\\ \lambda_n & \lambda_1 & \lambda_2 & \ldots & \lambda_{n-1}\\ \lambda_{n-1} & \lambda_n & \lambda_1 & \ldots & \lambda_{n-2}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \lambda_2 & \lambda_3 & \lambda_4 & \ldots & \lambda_1\end{pmatrix}$$

כעת, ניתן לראות כי

$$\widetilde{A}\widetilde{A}^*=\left(\sum\lambda_{k-i}\overline{\lambda_{k-j}}\right)_{i,j}=\widetilde{A}^*\widetilde{A}$$

דרך נוספת לראות נורמליות:

$$\widetilde{A}=\sum\lambda_iA^{i-1}=p\left(A\right),p=\sum_{i=1}^{n}\lambda_ix^{i-1}$$

וכעת, יש לנו טענה כללית:

טענה 1.3 אם T נורמלית, אזי $p\left(T\right)$ נורמלית.

הוכחה: T מתחלפת עם T^*, וכן $p\left(T\right)^*=\overline{p}\left(T^*\right)$, שכן זה נכון לכל מונום בנפרד, ולכן כל החזקות של T,T^* מתחלפות. מכאן נקבל כי $p\left(T\right)$ מתחלף עם $\overline{p}\left(T^*\right)=p\left(T\right)^*$.
■

ישנה עוד הוכחה: **הוכחה:** ניקח בסיס אורתונורמלי B שמלכסן את T, כלומר $[T]_B=D$ אלכסונית, ולכן $[p\left(T\right)]_B=p\left(D\right)$ גם היא אלכסונית. ■

נקבל מכאן שאותו בסיס שלכסן את A ילכסן את $\widetilde{A}$, ונקבל

$$\widetilde{A}=U\begin{pmatrix}p\left(1\right) & & & \\ & p\left(\omega\right) & & \\ & & \ddots & \\ & & & p\left(\omega^{n-1}\right)\end{pmatrix}U^{-1}$$

הסתכלות אלטרנטיבית: אם נתבונן בחוג הפולינומים $\mathbb{C}\left[x\right]$ מדולו הפולינום $x^{n}-1$, אזי A^{t} שלנו מייצגת כפל בפולינום x בחוג. המטריצה $\widetilde{A}^{t}$ מייצגת כפל בפולינום $p\left(x\right)$.

דוגמה

$$\begin{aligned}
A & = & \begin{pmatrix}0 & 1\\
 & \ddots & \ddots\\
 & & \ddots & 1\\
 & & & 0
\end{pmatrix}\\
AA^{*} & = & \begin{pmatrix}1\\
 & 1\\
 & & \ddots\\
 & & & 0
\end{pmatrix}\\
A^{*}A & = & \begin{pmatrix}0\\
 & 1\\
 & & \ddots\\
 & & & 1
\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

דוגמה במרחב $\mathbb{C}_{n-1}\left[x\right]$, עם

$$\left\langle p,q\right\rangle =\int_{0}^{1}p\left(x\right)\overline{q}\left(x\right)\,\mathrm{d}x$$

T- העתקת הנגזרת. ניקח $p_{0},\ldots,p_{n-1}$ בסיס אורתונורמלי, שבו p_{i} מדרגה i. p_{i}' הוא כפולה של p_{i-1}.

תרגיל מתי $\begin{pmatrix}a & b\\
c & d
\end{pmatrix}\in M_{2}\left(\mathbb{C}\right)$ נורמלית?

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix}a & b\\
c & d
\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\overline{a} & \overline{c}\\
\overline{b} & \overline{d}
\end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix}\left|a\right|^{2}+\left|b\right|^{2} & a\overline{c}+b\overline{d}\\
c\overline{a}+d\overline{b} & \left|c\right|^{2}+\left|d\right|^{2}
\end{pmatrix}\\
\begin{pmatrix}\overline{a} & \overline{c}\\
\overline{b} & \overline{d}
\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & b\\
c & d
\end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix}\left|a\right|^{2}+\left|c\right|^{2} & \overline{a}b+\overline{c}d\\
a\overline{b}+c\overline{d} & \left|b\right|^{2}+\left|d\right|^{2}
\end{pmatrix}\\
\left|a\right|^{2}+\left|c\right|^{2} & = & \left|a\right|^{2}+\left|b\right|^{2}\iff\left|c\right|=\left|b\right|\\
a\overline{c}+b\overline{d} & = & \overline{a}b+\overline{c}d\\
b\left(\overline{d}-\overline{a}\right) & = & \overline{c}\left(d-a\right)\\
\frac{b}{\overline{c}} & = & \frac{d-a}{\overline{\left(d-a\right)}}\vee b=c=0\vee a=d
\end{aligned}$$

קיבלנו שלוש משפחות:

$$\begin{pmatrix}a & 0\\
0 & d
\end{pmatrix},\begin{pmatrix}a & re^{i\theta_{1}}\\
re^{i\theta_{2}} & a
\end{pmatrix},\begin{pmatrix}a & re^{i\theta_{1}}\\
re^{i\theta_{2}} & d
\end{pmatrix},\theta_{1}+\theta_{2}=2\arg\left(d-a\right)$$

דוגמה

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 1-i & 2 \\ -2 & 1+i \end{pmatrix} \\ AA^* &= \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} = 6I \\ A^*A &= \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

לכן $\frac{1}{\sqrt{6}}A$ היא אוניטרית.

טענה 1.4 אם $a=\overline{d}$ וכן A נורמלית, אזי AA^* סקלארית.

הוכחה: $d-a$ מדומה טהור, שכן $a=\overline{d}$, ולכן $b=-\overline{c}$, ולכן נקבל

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ -\overline{b} & \overline{a} \end{pmatrix}$$

ואכן

$$AA^* = \begin{pmatrix} a & b \\ -\overline{b} & \overline{a} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{a} & -b \\ \overline{b} & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |a|^2+|b|^2 & 0 \\ 0 & |a|^2+|b|^2 \end{pmatrix}$$

■

נעבור לרעיון כללי. בתחילת הקורס דיברנו על לכסון/ז'ירדון של מטריצות, בו עבדנו עם יחס הדימיון עם מטריצה הפיכה:

$$A = P^{-1}JP$$

וזה שימש להעתקות לינאריות.
בהמשך עברנו לדבר על חפיפה של מטריצות, שוב עם מטריצה הפיכה:

$$A = P^tDP$$

וזה שימש לתבניות בי־לינאריות.
כעת אנו מדברים על תבניות הרמיטיות, שאותן ניתן לחפוף גם כן עם מטריצה הפיכה:

$$A = P^*BP$$

כעת, לכסון אורתוגונלי הוא מעין איחוד של המושגים הללו. לפי הבסיס האורתונורמלי, ההעתקה אלכסונית, והתבנית שהיא מגדירה היא אלכסונית גם כן.

$$\begin{aligned} Tv_i &= \lambda_i v_i \\ \left\langle T\left(\sum \alpha_i v_i\right), \sum \alpha_i v_i \right\rangle &= \left\langle \sum \alpha_i \lambda_i v_i, \sum \alpha_i v_i \right\rangle = \sum \lambda_i |a_i|^2 \end{aligned}$$