<u>אלגברה לינארית 2א</u>

ⓒ ארזים

24 במאי 2016

דיברנו על סוגים של העתקות - הרמיטיות ($T = T^*$), אנטי־הרמיטיות ($T = -T^*$) ואוניטריות ($T = {T^*}^{-1}$). מתקיים הקשר

$$T = T^* \iff iT = -\left(iT\right)^*$$

בממשיים יש הרבה יותר העתקות סימטריות מאשר אנטי־סימטריות (במונחי מימד).
לכל העתקה T נוכל להתבונן בהעתקה

$$\left(u, v\right) \to \langle Tu, v\rangle$$

העתקה זו היא הרמיטית אם ורק אם T צמודה לעצמה. כמו כן, יש לנו גם כי $T = T^*$ חיובית לחלוטין אם ורק אם $\langle Tu, v\rangle$ חיובית לחלוטין.
כמו כן, מעל $\mathbb{C}$, $T = T^*$ אם ורק אם $\langle Tv, v\rangle$ ממשי לכל v.
נתבונן במכפלה

$$\langle f, g\rangle = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f\left(x\right)\overline{g\left(x\right)}\,\mathrm{d}x$$

כאשר f, g הן מרוכבות ו־2π־מחזוריות. אם נגדיר $D : V \to V$ להיות העתקת הגזירה, אזי

$$D^* = -D$$

שכן מתקיים

$$\langle f', g\rangle + \langle f, g'\rangle = 0$$

אם נחפש ערכים עצמיים לטרנספורמציה -

$$\begin{aligned} Df &= \lambda f \\ f' &= \lambda f \\ f &= t \to e^{\lambda t}, \lambda = i \cdot n \end{aligned}$$

כמו כן ראינו כי $D^2f = f''$ היא צמודה לעצמה, והווקטורים העצמיים שלה הם $\cos(nt), \sin(nt)$ עבור הערך העצמי $-n^2$. היא שלילית לחלוטין.

נעבור לדבר על טרנספורמציות אוניטריות - כאלה שצמודות להופכית שלהן. העתקות כאלה הן משמרות מרחקים - כלומר

$$\begin{aligned} \langle Tu, Tv\rangle &= \langle u, v\rangle \\ ||Tv|| &= ||v|| \end{aligned}$$

במטריצות, מדברים על מטריצות בהן $A^* = A^{-1}$. כלומר

$$\begin{aligned} A^*A = I \quad &\iff \quad (\overline{a_{1i}}, \dots, \overline{a_{ni}}) \cdot \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \dots \\ a_{nj} \end{pmatrix} = \delta_{ij} \\ A \quad &= \quad (v_1, \dots, v_n) \\ A^*A = I \quad &\iff \quad \langle v_i, v_j\rangle = \delta_{ij} \end{aligned}$$

לכן למעשה מטריצה היא אוניטרית אם ורק אם עמודותיה הן בסיס אורתונורמלי. משום שמתקיים גם $AA^* = I$, מטריצה היא אוניטרית גם אם ורק אם שורותיה הן בסיס אורתונורמלי.

בטרנספורמציה כזו, כל הערכים העצמיים הם על מעגל היחידה. ראינו כי העתקות (ומטריצות) סיבוב הן העתקות (ומטריצות) אוניטריות. כנ"ל עבור העתקות (ומטריצות) שיקוף.

$O(n)$ - מטריצות אורתוגונליות מסדר n. $U(n)$ - מטריצות אוניטריות מסדר n.

$$A \in U(n) \Rightarrow \overline{\det A} = (\det A)^{-1} \Rightarrow |\det A| = 1$$

כמו כן יש את $SO(n)$ - מטריצות אורתוגונליות מסדר n בעלות דטרמיננטה 1.

$O(2)$ - סיבוב או שיקוף. $SO(2)$ - סיבוב.

$O(3)$ - שלושה איברים, אחד מספירה תלת מימדית, אחד מספירה דו מימדית ואחד מספירה של חד מימדית. $SO(3)$ - שלושה איברים, אחד מספירה תלת מימדית, אחד מספירה דו מימדית ואז השלישי נקבע ביחידות. נסמן S^{n-1} להיות ספירה של n מימדים. לכן למעשה מתקיים

$$O(n) \approx S^{n-1} \times O(n-1)$$

עבור $A \in M_3(\mathbb{R})$, $\det A = 1$, כך שמתקיים $A^T = A^{-1}$. כל הערכים העצמיים הם בעלי ערך מוחלט 1, והם באים בזוגות צמודים. מתוך כך שמתקיים $\det A = 1$, נקבל שהערכים העצמיים הם בהכרח $1, \lambda, \overline{\lambda}$, $|\lambda| = 1$.

קיים בהכרח v עבורו $Av = v$. בפרט, $\mathrm{span}\{v\}$ הוא A-אינווריאנטי, ולכן גם $\mathrm{span}\{v\}^\perp$ הוא A-אינווריאנטי. כעת $A|_{\mathrm{span}\{v\}^\perp}$ היא אורתוגונלית מיוחדת, כלומר סיבוב. לכן, למעשה סיבוב במרחב $\mathbb{R}^3$ הוא בחירה של ישר שהוא הציר, ואז סיבוב של המישור הניצב לישר הזה בזווית θ כלשהי. במצב זה יתקיים $\lambda = e^{i\theta}$.