אלגברה לינארית 2א

ⓒ ארזים

1 במרץ 2016

1 ווקטורים עצמיים וערכים עצמיים

הגדרה 1.1 אם $T:V\rightarrow V$ טרנספורמציה לינארית, v ווקטור עצמי אם קיים סקלר λ כך שמתקיים $T\left(v\right)=\lambda v$. סקלר זה נקרא הערך העצמי של v.

ההגדרה זהה עבור מטריצות:

$$Av=\lambda v$$

כמו כן, אם $A=\left[T\right]_{B}$ אז יש להן את אותם ערכים עצמיים, כלומר v ווקטור עצמי של T אם ורק אם $\left[v\right]_{B}$ווקטור עצמי של A.
דוגמאות:

.1

$$\begin{aligned}
A &= \begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\\
v_{1} &= \begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix},\lambda_{1}=2\\
v_{2} &= \begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix},\lambda_{2}=1
\end{aligned}$$

.2

$$\begin{aligned}
A &= \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\\
v_{1} &= \begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix},\lambda_{1}=1\\
v_{2} &= \begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix},\lambda_{2}=-1
\end{aligned}$$

.3

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \\ v_1 &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \lambda_1 = 3 \\ v_2 &= \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \lambda_2 = 1 \end{aligned}$$

.4 העתקת השיקוף:

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{pmatrix} \\ v_1 &= \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}, \lambda_1 = 1 \\ v_2 &= \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}, \lambda_2 = -1 \end{aligned}$$

אם נסמן T_θ את העתקה ההכפלה במטריצה A (שיקוף ביחס לישר שזוויתו מציר x היא θ) וכן נסמן $B_\theta = \{v_1, v_2\}$, נקבל

$$[T_\theta]_{B_\theta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

.5 העתקת הסיבוב:

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

עבור $\theta = 0$, נקבל

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

וכעת כל וקטור הוא וקטור עצמי עם ערך עצמי 1.
עבור $\theta = \pi$, נקבל

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

וכעת כל וקטור הוא וקטור עצמי עם ערך עצמי 1-.
לכל ערך אחר של θ, אין וקטורים עצמיים.

.6

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \\ v_1 &= \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \lambda_1 = 2 \\ v_2 &= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \lambda_2 = -1 \end{aligned}$$

.7

$$\begin{aligned} T : p(x) &\to p'(x) \\ v &= c, \lambda = 0 \\ A_T &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \dots & \dots & \dots & \dots & \vdots \\ \vdots & \dots & \dots & \dots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & n \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

.8

$$\begin{aligned} T : p(x) &\to ((x+1)\,p(x))' \\ v_i &= (x+1)^i \\ A_T &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \dots & \dots & \dots & \dots & \vdots \\ \vdots & \dots & \dots & \dots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & n+1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

כיצד נמצא את הווקטור העצמי שמתאים לערך עצמי מסויים? למשל, עם המטריצה $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$ והערך העצמי 2:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= 2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ \left(\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

וכעת פותרים את מערכת המשוואות.
נשים לב שהעובדה שמספר λ הוא ערך עצמי שקולה לכך שמתקיים

$$\ker(A-\lambda I)\neq\{\theta\}\iff\det(A-\lambda I)=0$$

וכך נמצא ערכים עצמיים כלליים.
<u>דוגמאות נוספות:</u> נעבוד במרחב $\mathbb{C}^2$:

1.

$$\begin{aligned}A&=\begin{pmatrix}1&i\\i&1\end{pmatrix}\\v_1&=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\lambda_1=1+i\\v_2&=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix},\lambda_2=1-i\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}A&=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}\\v_1&=\begin{pmatrix}i\\1\end{pmatrix},\lambda_1=i\\v_2&=\begin{pmatrix}-i\\1\end{pmatrix},\lambda_2=-i\end{aligned}$$

זהו למעשה סיבוב בזווית $\theta=\frac{\pi}{2}$, שמעל הממשיים לא היו לו ווקטורים עצמיים - אבל מעל המרוכבים יש לו.

אם A מטריצה ממשית שיש לה ווקטור עצמי מרוכב עם ערך עצמי ממשי, קיים ווקטור ממשי שגם הוא ווקטור עצמי עם אותו ערך עצמי. זאת משום שתוך דירוג של $A-\lambda I$ כדי למצוא את הווקטור שפותר את מערכת המשוואות, עושים פעולות רק בממשיים, ולכן אם קיים פיתרון, קיים גם פיתרון ממשי.
אם $[T]_B$ מטריצה אלכסונית שמייצגת את T בבסיס כלשהו, אזי מתקיים

$$\begin{aligned}[T]_B&=\begin{pmatrix}\lambda_1&0&\dots&0&0\\0&\lambda_2&\dots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\0&0&\dots&\lambda_{n-1}&0\\0&0&\dots&0&\lambda_n\end{pmatrix}\\tr(T)&=tr([T]_B)=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\\\det(T)&=\det([T]_B)=\prod_{i=1}^{n}\lambda_i\end{aligned}$$

לדוגמא:

$$
\begin{aligned}
A &= \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \\
v_1 &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \lambda_1 = a+b \\
v_2 &= \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \lambda_2 = a-b \\
tr\left(A\right) &= 2a = a+b+a-b = \lambda_1+\lambda_2 \\
\det\left(A\right) &= a^2-b^2 = \left(a-b\right)\left(a+b\right) = \lambda_1\cdot\lambda_2
\end{aligned}
$$