אלגברה לינארית 2א

ⓒ ארזים

8 במרץ 2016

דוגמאות לפולינום אופייני:

1. מטריצה אלכסונית:

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} \\ f_A(x) &= \left| \begin{pmatrix} x-\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & x-\lambda_n \end{pmatrix} \right| = \prod_{i=1}^{n} (x-\lambda_i) \end{aligned}$$

2. הכללה טבעית - מטריצה משולשית:

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & * \\ & \ddots & * \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} \\ f_A(x) &= \prod_{i=1}^{n} (x-\lambda_i) \end{aligned}$$

3. הכללה טבעית נוספת - מטריצת בלוקים משולשית:

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} B & D \\ \theta & C \end{pmatrix} \\ f_A(x) &= f_B(x) \cdot f_C(x) \end{aligned}$$

1 פולינום אופייני של טרנספורמציה לינארית

הגדרה 1.1 תהי $T: V \to V$ טרנספורמציה לינארית, ותהי A מטריצה המייצגת אותה ביחס לבסיס B כלשהו. נרצה להגדיר את הפולינום האופייני של T, $f_T(x)$ על ידי

$$f_T(x) = f_A(x)$$

כדי שהגדרה זו תהיה טובה, יש להראות שאם A,C שתיהן מייצגות את T אזי

$$f_A(x)=f_C(x)$$

ידוע על A,C שהן דומות, כלומר קיימת מטריצה הפיכה P כך שמתקיים

$$A=PCP^{-1}$$

לכן, יש להוכיח את המשפט הבסיסי הבא:

משפט 1.2 אם $A,C\in M_n(F)$ מטריצות דומות, אזי

$$f_A(x)=f_B(x)$$

הוכחה: נתון שקיימת P הפיכה כך שמתקיים

$$A=PCP^{-1}$$

אז לכל $x\in F$,

$$P(xI-C)P^{-1}=(PxI-PC)P^{-1}=PxIP^{-1}-PCP^{-1}=xI-A$$

ולכן המטריצות $xI-A,xI-C$ דומות, ולכן יש להן אותה דטרמיננטה, ומכאן

$$f_A(x)=f_C(x)$$

■

ישנה בעייתיות קלה - הוכחנו כי לכל הצבה של סקלר הערכים של הפולינומים שווים, אבל היא לא מוכיחה שוויון פורמלי של פולינומים.
הדרך הטבעית ביותר לפתור את הבעיה היא להחליף את השדה F בשדה הפונקציות הרציונאליות מעל F, כלומר כל הפונקציות מהצורה $\frac{P(x)}{Q(x)}$ כאשר P,Q פולינומים של x עם מקדמים מהשדה F, Q אינו פולינום האפס.
עכשיו חוזרים על הוכחת המשפט הקודם כאשר חושבים על מטריצות $xI-A,xI-C$ כמטריצות מעל שדה הפונקציות הרציונאליות. ההוכחה מראה שגם מעל שדה זה, המטריצות דומות, ולכן הדטרמיננטה שלהן שווה - ולכן הפעם הפולינומים שווים ממש.
<u>דוגמאות:</u>

1. נניח $0\le\theta\le2\pi$, והטרנספורמציה $T_\theta:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ היא טרנספורמציית הסיבוב בזווית θ. כעת, המטריצה המייצגת של T_θ היא

$$\begin{aligned}A_\theta &= \begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\\ f_{T_\theta}(x) &= f_{A_\theta}(x)=x^2-2\cos\theta+1\end{aligned}$$

כאשר $\theta\neq0,\pi$ אין לפולינום שורשים. עבור $\theta=0$ זוהי טרנספורמציית הזהות, ועבור $\theta=\pi$ - מינוס הזהות.

2. יהי $V=\mathbb{R}_n[t]$ מרחב הפולינומים הממשיים ממעלה לכל היותר n. תהי $T:V\to V$ טרנספורמציית הגזירה: $T(p)=p'$.
ניקח את הבסיס הסטנדרטי:

$$\left\{1,t,t^2,\ldots,t^n\right\}$$

ונייצג את T במטריצה איתו:

$$A=\begin{pmatrix}0 & 1 & & & \\ & 0 & 2 & & \\ & & 0 & \ddots & \\ & & & \ddots & n \\ & & & & 0\end{pmatrix}$$

זוהי מטריצה משולשית עליונה מסדר $(n+1)\times(n+1)$. לכן הפולינום האופייני שלה הוא

$$f_T(x)=f_A(x)=x^{n+1}$$

השורש היחיד שלו הוא $x=0$, ולכן זהו הערך העצמי היחיד של T.

ניזכר כי הגדרנו את הריבוי הגיאומטרי של הערך העצמי λ:

$$r_\lambda=\dim\left(\ker\left(T-\lambda I\right)\right)$$

למשל, עבור הגזירה, $r_0=1$.

הגדרה 1.3 בהינתן טרנספורמציה לינארית T מגדירים את הריבוי האלגברי של ערך עצמי λ של T (d_λ) כמספר הפעמים שהגורם $(x-\lambda)$ מחלק את $f_T(x)$. כלומר זהו k המקסימלי עבורו ניתן לכתוב, עבור פולינום כלשהו $g(x)$,

$$f_T(x)=(x-\lambda)^k g(x)$$

למשל, עבור טרנספורמציית הגזירה T, $d_0=n+1$.
במצבים בהם יש n ערכים עצמיים שונים לטרנספורמציה/מטריצה ממימד n, הריבוי הגיאומטרי של כל ערך עצמי שווה לריבוי האלגברי שלו, וכולם שווים 1.

טענה 1.4 לכל טרנספורמציה לינארית $T:V\to V$, כאשר $\dim V=n$, מתקיים

$$\sum_\lambda d_\lambda\le n$$

הוכחה: נפרק את $f_T(x)$ למכפלת גורמים לינאריים כמה שאפשר. נקבל

$$f_T(x)=\left(\prod_{i=1}^{m}(x-\lambda_i)^{d_{\lambda_i}}\right)g(x)$$

אנו נוכיח בקרוב שהפירוק הזה יחיד, ושהחזקה המופיעה בו של כל גורם לינארי היא באמת, כמו שכתוב, הריבוי האלגברי. אפשר לראות בפרוצדורה הזו הגדרת הריבוי האלגברה.
כעת, כאשר מסתכלים על מעלת הפולינום, ברור שמתקיים

$$n=\deg(f_T(x))=\deg(g(x))+\sum_{i=1}^{m}d_{\lambda_i}\geq\sum_{i=1}^{m}d_{\lambda_i}$$

■

טענה 1.5 לכל λ שהוא ערך עצמי של טרנספורמציה T מתקיים

$$r_\lambda\leq d_\lambda$$

הוכחה: נסמן $r_\lambda=\dim(V_\lambda)=\dim(\ker(T-\lambda I))=r$. ניקח $v_1,\ldots,v_r$ בסיס למרחב V_λ, ונשלים אותו לבסיס של כל V:

$$v_1,\ldots,v_r,v_{r+1},\ldots,v_n$$

כעת נתבונן במטריצה של הטרנספורמציה ביחס לבסיס זה:

$$A=\begin{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda\end{pmatrix} & C\\ \theta & D\end{pmatrix}$$

זוהי מטריצת בלוקים משולשית, ולכן הפולינום האופייני שלה הוא

$$f_T(x)=(x-\lambda)^r\cdot f_C(x)$$

ולכן בהכרח, $r\leq d_\lambda$. ■

משפט 1.6 תהי $T:V\to V$ טרנספורמציה לינארית. אזי T לכסינה אם ורק אם מתקיימים שני התנאים הבאים:

1. $f_T(x)$ מכפלה של גורמים לינאריים, כלומר

$$f_T(x)=\prod_{i=1}^{n}(x-\lambda_i)$$

2. לכל ערך עצמי λ מתקיים

$$r_\lambda = d_\lambda$$

הוכחה: כיוון ראשון: נניח שהתנאים מתקיימים. תנאי 1 מבטיח לנו שמתקיים

$$\sum_\lambda d_\lambda = n$$

מן הצד השני, לפי תנאי 2, $r_\lambda = d_\lambda$ לכל λ, ולכן

$$\sum_\lambda r_\lambda = n$$

ולכן, ממשפט שהוכחנו כבר, T לכסינה.
כיוון שני: נניח Tלכסינה. אזי הפולינום האופייני שלה שווה לפולינום האופייני של מטריצה אלכסונית, כלומר מכפלת גורמים לינאריים:

$$f_T\left(x\right) = \prod_{i=1}^{n}\left(x-\lambda_i\right)$$

כמו כן, הוכחנו בעבר כי כאשר T לכסינה,

$$\sum_\lambda r_\lambda = n$$

הוכחנו גם $r_\lambda \leq d_\lambda$, וכן

$$\sum_\lambda d_\lambda \leq n$$

ולכן, בסך הכל, $r_\lambda = d_\lambda$ לכל λ. ■