אלגברה לינארית 2א

ארזים ©

3 במרץ 2016

ניזכר שהגדרנו ווקטורים וערכים עצמיים של מטריצות, והראינו כי זהו מקרה פרטי של ההגדרות עבור טרנספורמציות. לכן כל המשפטים והמסקנות שהוכחנו לגבי טרנספורמציות תקפים גם לגבי מטריצות.

הגדרה 0.1 מטריצה $A \in M_n(F)$ תיקרא לכסינה אם היא דומה למטריצה אלכסונית, כלומר קיימת מטריצה הפיכה P כך שהמטריצה $P^{-1}AP$ היא אלכסונית.

משפט 0.2 תהי $A \in M_n(F)$, $P \in M_n(F)$ הפיכה. אזי

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

אם ורק אם עמודות P הן ווקטורים עצמיים של A עם ערכים עצמיים $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ בהתאמה.

משפט זה מסביר מדוע הגדרת לכסינות של מטריצה היא באמת זהה להגדרת לכסינות של הטרנספורמציה T_A על F^n.

הוכחה: נסמן את P לפי עמודותיה: $P = (V_1, \dots, V_n)$. כעת, מצד אחד

$$AP = (Av_1, \dots, Av_n)$$

ומצד שני

$$P \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} = (\lambda_1 v_1, \dots, \lambda_n v_n)$$

ומכאן ברור שמתקיים

$$AP = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

אם ורק אם לכל $1 \leq i \leq n$ מתקיים

$$Av_i = \lambda_i v_i$$

ומאחר שהמטריצה P הפיכה, השוויון במשפט נובע. $\blacksquare$

__דוגמא:__ חשב את הווקטורים והערכים העצמיים של המטריצה $A = \begin{pmatrix} -7 & 8 \\ -6 & 7 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$.

__תשובה:__ ראשית נחשב את הערכים העצמיים. λ ערך עצמי אם קיים $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ כך שמתקיים

$$\begin{aligned} A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda I \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ (\lambda I - A)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= 0 \\ \lambda I - A &= \begin{pmatrix} \lambda + 7 & -8 \\ 6 & \lambda - 7 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

אנו יודעים שקיים וקטור כזה אם ורק אם המטריצה $\lambda I - A$ אינה הפיכה, כלומר הדטרמיננטה שלה היא 0.

$$\det(\lambda I - A) = (\lambda - 7)(\lambda + 7) + 48 = \lambda^2 - 1 = 0$$

ולכן $\lambda = \pm 1$ הם בדיוק הערכים העצמיים. עבור כל λ אחר המטריצה הפיכה, ולכן אין וקטורים בגרעין.
נחפש את הווקטורים העצמיים המתאימים לערכים העצמיים הללו.
עבור $\lambda = 1$, נחפש פתרון לא טריוויאלי למערכת

$$\begin{pmatrix} 8 & -8 \\ 6 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$$

נשים לב שהווקטור $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ הוא פיתרון.
עבור $\lambda = -1$ נחפש פתרון למערכת

$$\begin{pmatrix} 6 & -8 \\ 6 & -8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$$

וכאן הווקטור $\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ הוא פתרון.
לכן, מהמשפט שהוכחנו, אם נגדיר את P להיות

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

אזי מתקיים

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$$

ובכך ליכסנו את המטריצה. כעת, למשל

$$\begin{aligned}\left(P^{-1}AP\right)^2 &= \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}^2=I\\ \left(P^{-1}AP\right)\left(P^{-1}AP\right) &= P^{-1}A^2P=I\\ A^2 &= I\end{aligned}$$

<u>דוגמא:</u> נשוב לסדרת פיבונאצ'י. הוכחנו כי מתקיים

$$\begin{pmatrix}F_{n+1}\\ F_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}^n\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}$$

נשים לב שלכל m טבעי, אם מסתכלים על איברי הסדרה מודולו m, חייבים קבל החל ממקום מספיק רחוק סדרה מחזורית. למשל עבור $m=7$ נקבל:

$$0,1,1,2,3,5,1,6,0,6,6,5,4,2,6,1,0,1$$

ואורך המחזור הוא 16. אורך מחזור זה תמיד יהיה לכל היותר m^2 שכן זו כמות האפשרויות לזוגות רצופים של שאריות - ברגע שזוג מסויים חוזר הסדרה כולה תחזור.

משפט 0.3 אם p ראשוני ומשאיר שארית $1,4$ מודולו 5, אזי אורך המחזור של סדרת פיבונאצ'י מודולו p הוא לכל היותר $p-1$.

הוכחה: נסתכל כל סדרת פיבונאצ'י מודולו p, ומכיוון שקבוצת השאריות מודולו מספר ראשוני היא השדה $\mathbb{F}_p$, אנו עוברים לבעיה באלגברה לינארית המתרחשת בשדה זה. יש לנו נוסחה לחישוב האיבר הכללי:

$$\begin{pmatrix}F_{n+1}\\ F_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}^n\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}$$

לכן אם נמצא m כך שמתקיים, בשדה $\mathbb{F}_p$,

$$A^{n+m}=A^n$$

בוודאי m נותן מחזור לסדרת פיבונאצ'י. מכיוון שהמטריצה A הפיכה, זה שקול למציאת m כך שמתקיים

$$A^m=I$$

לשם כך נרצה ללכסן את את A. לשם הליכסון חוזרים על אותו רעיון כמו בדוגמה הראשונה: מחפשים λ כך שמתקיים

$$\det\left(\lambda I-A\right)=\det\begin{pmatrix}\lambda-1 & -1\\ -1 & \lambda\end{pmatrix}=\lambda^{2}-\lambda-1=0$$

לכן נרצה לפתור את המשוואה למעלה בשדה $\mathbb{F}_p$. בדיוק אותה נוסחת פתרון כמו בשדה הממשי עובדת למשוואה ריבועית בכל שדה עם מציין שאינו 2. לכן:

$$\lambda_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^{2}-4ac}}{2a}=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$$

לפי חוק ההדדיות הריבועית של גאוס (קחו את הקורס תורת המספרים, שווה לכם), 5 הוא ריבוע מודולו p אם ורק אם $p\equiv1,4\left(\mod5\right)$. כלומר, קיים n כך שמתקיים

$$n^{2}\equiv5\left(\mod p\right)$$

כלומר, p מחלק את $n^{2}-5$.
לכן, עבור הראשוניים p כמו במשפט, קיימים שני ערכים עצמיים שונים למטריצה בשדה $\mathbb{F}_p$.
לפיכך, ניתן ללכסן את המטריצה מעל שדה זה.
כעת, נפעיל את משפט פרמה הקטן (שוב, לכו לקחת תורת המספרים), שאומר שבשדה $\mathbb{F}_p$, לכל איבר $a\neq0$,

$$a^{p-1}\equiv1\left(\mod p\right)$$

אצלנו, הערכים העצמיים אינם 0, שכן A הפיכה, ולכן כאשר נעלה את A בחזקת $p-1$ נקבל, בדיוק כמו בדוגמא הקודמת,

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}\lambda_{1} & 0\\ 0 & \lambda_{2}\end{pmatrix}^{p-1} &= I\\ A^{p-1} &= I\end{aligned}$$

■

משפט 0.4 תהי $A\in M_{n}\left(F\right)$. אזי λ ערך עצמי של A אם ורק אם

$$\det\left(\lambda I-A\right)=0$$

הוכחה: λ הוא ערך עצמי של A אם ורק אם קיים ווקטור $\theta\neq v\in F^{n}$ כך שמתקיים $Av=\lambda v$, ומהעברת אגפים נקבל שקילות למשוואה $\left(\lambda I-A\right)v=\theta$, וזה מתקיים אם ורק אם $\lambda I-A$ אינה הפיכה, כלומר אם ורק אם הדטרמיננטה שלה 0. ■

הגדרה 0.5 בהינתן מטריצה $A \in M_n(F)$, נגדיר את <u>הפולינום האופייני</u> של A באופן הבא:

$$f_A(x) = \det(xI - A)$$

לכן המשפט האחרון שקול לאמירה שהסקלר λ הוא ערך עצמי אם ורק אם הוא שורש של הפולינום האופייני.

<u>**דוגמא:**</u> עבור $n = 2$, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$:

$$\begin{aligned} f_A(x) &= \det(xI - A) = \det\left(\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = \\ &= \det\begin{pmatrix} x-a & b \\ c & x-d \end{pmatrix} = (x-a)(x-d) - bc = \\ &= x^2 - (a+d)x + (ad - bc) = x^2 - x \cdot \operatorname{tr}(A) + \det A \end{aligned}$$

משפט 0.6 לכל מטריצה $A \in M_n(F)$, הפולינום האופייני שלה מקיים:

1. הוא פולינום מתוקן ממעלה n (המקדם של x^n הוא 1).
2. המקדם של x^{n-1} הוא $-\operatorname{tr}(A)$, כלומר סכום איברי האלכסון של A.
3. האיבר החופשי הוא $(-1)^n \det A$.

הוכחה:

$$\begin{aligned} f_A(x) &= \det(xI - A) = \\ &= \det\begin{pmatrix} x - a_{1,1} & -a_{1,2} & \dots & -a_{1,n} \\ -a_{2,1} & x - a_{2,2} & \dots & -a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n,1} & -a_{n,2} & \dots & x - a_{n,n} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

בדטרמיננטה יש $n!$ מחוברים, כולם פולינומים ממעלה 0 או 1. לכן דרגת כל מחובר היא לכל היותר n, ולכן דרגת $f_A(x)$ היא לכל היותר n. מעלתו היא למעשה בדיוק n, והוא פולינום מתוקן, כי בדיוק אחד מבין $n!$ המחוברים בפיתוח הדטרמיננטה יהיה ממעלה n - מכפלת איברי האלכסון, בה יהיה לאיבר x^n מקדם 1 בהכרח. כך הוכחנו את הטענה הראשונה במשפט.

גם התרומה למקדם של x^{n-1} בפולינום האופייני מגיעה רק ממכפלת איברי האלכסון הראשי, שכן כל מחובר אחר, שמחסיר לפחות איבר אחד מהאלכסון, חייב להחסיר לפחות שניים, ולכן מעלתו לכל היותר $n-2$. לכן, המקדם של x^{n-1} בפולינום האופייני הוא בדיוק המקדם שלו במכפלת איברי האלכסון - וקל לראות כי זהו $\operatorname{tr}(A)$. כל הוכחנו את הטענה השנייה משפט.

את האיבר החופשי בכל פולינום ניתן לקבל על ידי הצבת $x = 0$, ולכן האיבר החופשי בפולינום האופייני יהיה

$$f_A(0) = \det(-A) = (-1)^n \det A$$

ובכך הוכחנו את הטענה השלישית במשפט. ■