אלגברה לינארית 2א

ⓒ ארזים

7 ביוני 2016

מעל $\mathbb{C}$, ראינו כי המשפט הספקטרלי נותן לכסון אונטרי מלא של טרנספורמציות נורמליות (וכמובן, אם יש לכסון אוניטרי אז הטרנספורמציה בהכרח נורמלית). מעל $\mathbb{R}$, אנחנו נאלצים להניח שהפולינום האופייני מתפצל למכפלת גורמים לינאריים (מעל $\mathbb{R}$). במצב זה המשפט אכן נכון מעל $\mathbb{R}$. הבעיה היא שההנחה מתקיימת אם ורק אם $T = T^*$, או, בגרסה המטריציונית, $A = A^t$.

עיקר המטרה של השיעור היום: מה בכל זאת ניתן לומר כאשר A או T נורמלית במקרה הממשי, למרות שהפולינום האופייני לא בהכרח מתפצל מעל $\mathbb{R}$. הכלי המרכזי לשם הבנת טרנספורמציות נורמליות גם מעל $\mathbb{R}$ הוא המשפט הבא:

משפט 0.1 תהי T טרנספורמציה נורמלית על מרחב מכפלה פנימית V מעל $\mathbb{F} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. אזי קיים פולינום $f(x) \in \mathbb{F}[x]$ כך שמתקיים $T^* = f(T)$.

נשים לב שהתכונה הזו בוודאי גוררת נורמליות - T מתחלפת עם כל פולינום בה. המשפט למעשה נותן הסבר קונספטואלי לתופעת הנורמליות. כפי שנראה בהמשך, הוא גם שימושי מאוד.

באופן מקביל נוכיח זאת גם עבור מטריצות, ואפילו נתחיל בהוכחה עם דיון במקרה זה. כמו כן, כחלק מהמשפט, נוכיח שאת הפולינום ניתן לקחת ממעלה לכל היותר $n-1$, כאשר $n = \dim V$ או $A \in M_n(\mathbb{F})$.

כהקדמה להוכחת המשפט נביט תחילה במטריצות אלכסוניות D:

טענה 0.2 תהי $D \in M_n(\mathbb{F})$, $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$. אזי קיים פולינום $f(x) \in \mathbb{F}[x]$ כך שמתקיים $f(D) = D^* = \begin{pmatrix} \overline{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \overline{\lambda_n} \end{pmatrix}$.

הערה 0.3 מעל $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ ניתן לבחור את הפולינום כך שמתקיים $\deg(f) \leq n-1$, וניתן לבחור $f \in \mathbb{R}[x]$ אם $\{\lambda_i\}$ סגורה תחת הצמדה.

הוכחה: באופן כללי, אם $f(x) \in \mathbb{F}[x]$ פולינום שמקיים שלכל i, $f(\lambda_i) = \overline{\lambda_i}$, אזי יתקיים $f(D) = \overline{D} = D^*$. ניזכר שבתרגיל בית מספר 3, בשאלה 2, הוכחנו שלכל $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{F}$ שונים ולכל $b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{F}$ קיים פולינום יחיד f ממעלה לכל היותר $n-1$ המקיים $f(a_i) = b_i$. יותר מכך - במקרה $a_i, b_i \in \mathbb{C}$, אם עדיין מחפשים פולינום ממשי, הוא עדיין קיים ויחיד ממעלה לכל היותר $n-1$, אם $b_i = \overline{a_i}$ והקבוצה $\{a_i\}$ סגורה תחת הצמדה. ■

מסקנה 0.4 מעל $\mathbb{F}\in\{\mathbb{R},\mathbb{C}\}$, נניח כי $A\in M_n(\mathbb{F})$ נורמלית. אזי קיים פולינום $f(x)\in\mathbb{F}[x]$ כך שמתקיים $A^*=f(A)$, וכן $\deg(f)\le n-1$.

הוכחה: מהמשפט הספקטרלי, קיימות אוניטרית P ואלכסונית D המקיימות $A=PDP^{-1}$. נשתמש בטענה שהוכחנו עבור המטריצה האלכסונית D - יהי $f(x)\in\mathbb{F}[x]$ כך שמתקיים $f(D)=D^*$. נשים לב שבמקרה $\mathbb{F}=\mathbb{R}$, $\{\lambda_i\}$ הם שורשיו של הפולינום האופייני הממשי של A, ולכן סגורים תחת הצמדה, ולכן נוכל לבחור פולינום f ממשי. כעת, נחשב ונקבל:

$$f(A)=f\left(PDP^{-1}\right)=Pf(D)P^{-1}=PD^*P^{-1}=\left(P^{-1}\right)^*D^*P^*=(PDP)^*=A^*$$

■

כעת, נוכיח את המשפט עבור טרנספורמציות לינאריות: **הוכחה:** כרגיל, נבחר בסיס אורתונורמלי B של V, נסמן $A=[T]_B$. מהמסקנה המטריציונית, קיים $f(x)\in\mathbb{F}[x]$ כך שמתקיים $f(A)=A^*$, אבל מתקיים כי $[f(T)]_B=f(A)$ לכל פולינום, ולכן $[f(T)]_B=f(A)=$ $A^*=[T^*]_B$, ובסך הכל $f(T)=T^*$. ■

דוגמה שימוש במשפט מתרגיל הבית האחרון:

טענה 0.5 אם $A\in M_2(\mathbb{R})$ נורמלית אזי $A=A^t$ או $A=\begin{pmatrix}a&b\\-b&a\end{pmatrix}$.

הוכחה: מהמשפט, אם A נורמלית אזי קיים פולינום מדרגה לכל היותר $2-1=1$, כלומר לינארי, $f(x)\in\mathbb{R}[x]$, כך שמתקיים

$$f(A)=A^t$$

נסמן $f(x)=\alpha x+\beta$, ונקבל

$$\begin{aligned}A^t&=\alpha A+\beta I\\A&=\alpha A^t+\beta I=\alpha(\alpha A+\beta I)+\beta I=\alpha^2A+\beta(\alpha+1)I\end{aligned}$$

כעת, אם נחשב, נקבל כי אם $A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$, אזי

$$A=\alpha^2A+\beta(\alpha+1)I=\begin{pmatrix}\alpha^2a+\beta(\alpha+1)&\alpha^2b\\\alpha^2c&\alpha^2d+\beta(\alpha+1)\end{pmatrix}$$

וכעת נקבל כי $\alpha^2=1$, כלומר $\alpha=\pm1$. נחלק למקרים:
אם $\alpha=1$:

$$\begin{aligned}A&=A+2\beta I\\0&=\beta I\\0&=\beta\end{aligned}$$

ולכן

$$A^t = \alpha A + \beta I = A$$

אם $\alpha = -1$:

$$\begin{aligned} A^t &= -A + \beta I \\ A^t + A &= \beta I \end{aligned}$$

מכאן שבהכרח $A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ - כדי שנקבל מטריצה סקלרית, האיברים המנוגדים סביב האלכסון צריכים להיות נגדיים $(b, -b)$, והערכים על האלכסון חייבים להיות זהים. ■

לשם הדיון במקרה הלא סימטרי: $b \neq 0$, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$, הפולינום האופייני קובע את A עד כדי הסימן של b - זאת משום שמתקיים

$$f_A(x) = x^2 - x \cdot \mathrm{tr} A + \det A = x^2 - 2ax + a^2 + b^2$$

זה אומר ששתי מטריצות נורמליות שאינן סימטריות בעלות אותו פולינום אופייני הן זהות עד כדי הסימן של b, ומעניין הסימן הזה באמת אי אפשר להיפטר - כלומר

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

מסקנה חשובה מאוד מהמשפט שהוכחנו:

מסקנה 0.6 תהי T טרנספורמציה לינארית נורמלית על מרחב מכפלה פנימית V מעל $\mathbb{F} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, ויהי $W \subseteq V$ תת מרחב T-אינווריאנטי. אזי W הוא גם T^*-אינווריאנטי. לכן ניתן לדבר גם על הצמצום של T^* על W, ומתקיים כי $T|_W$ היא גם כן נורמלית. כמו כן, מתקיים כי $W^\perp$ הוא T-אינווריאנטי (משום שראינו כי W הוא T^*-אינווריאנטי) וכן T^*-אינווריאנטי (משום שהנחנו כי W הוא T-אינווריאנטי).

הוכחה: עיקר העניין הוא העובדה, שבפני עצמה אינה טריוויאלית בכלל, שאם W הוא T-אינטריאנטי אזי W גם T^*-אינווריאנטי. כל השאר נובע בקלות מתוצאות ישנות - ראינו כי אם S נורמלית, W S-אינווריאנטי, אזי $W^\perp$ S^*-אינווריאנטי. משתמשים בזה עבור $S = T$ וכן עבור $S = T^*$.

בנוסף, נעיר שברגע שיודעים שהמרחב W הוא גם T-אינווריאנטי וגם T^*-אינווריאנטי, הנורמליות של $T|_W$ מיידית: היא נורמלית על כל V, ומוגדרת היטב בצמצום על W, לכן בפרט נורמלית גם על W.

כל שנותר הוא להראות את הטענה המרכזית. אבל זה נובע ישירות מהמשפט שהראינו - אם W אינווריאנטי על T, אזי הוא אינווריאנטי על כל פולינום של T - ואם T נורמלית אז T^* היא פולינום של T. ■

כדי לסיים את הדיון בטרנספורמציות לינאריות נורמליות נזדקק רק לטענה הכללית הבאה, שלא עוסקת במרחבי מכפלה פנימית:

טענה 0.7 תהי T טרנספורמציה לינארית על מרחב ווקטורי V מעל $\mathbb{R}$. אזי קיים תת מרחב $W \subseteq V$ שהוא T־אינווריאנטי ומימדו לכל היותר 2.

משפט 0.8 תהי T טרנספורמציה לינארית נורמלית על מרחב מכפלה פנימית V מעל $\mathbb{R}$. אזי קיים בסיס אורתונורמלי של V שביחס אליו $[T]_B$ היא מטריצת בלוקים מהצורה

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \lambda_k & & & \\ & & & A_1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & A_m \end{pmatrix}$$

כאשר $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ ערכים עצמיים של T, והמטריצות $\{A_j\}$ הן מהצורה $A_j = \begin{pmatrix} a_j & b_j \\ -b_j & a_j \end{pmatrix}$.

הוכחה: באינדוקציה על $n = \dim V$. עבור $n = 1$, טריוויאלי.

במקרה הכללי ־ משתמשים בטענה הכללית (שלא הוכחנו כאן) כדי למצוא תת מרחב $W \subseteq V$ שהוא T־אינווריאנטי וכן $\dim W \leq 2$ (אין קשר לנורמליות של T).

באופן כללי, W לא חייב להיות T^*־אינווריאנטי, אבל כאשר T נורמלית הוכחנו שזה כן המצב ־ כלומר בפירוק $V = W \oplus W^\perp$, שני תתי המרחבים הם T־אינווריאנטיים וכן T^*־אינווריאנטיים, והצמצום של T אליהם הוא טרנספורמציה לינארית נורמלית.

אם $\dim W = 1$ זהו בעצם (כפילות של) ווקטור עצמי. ניקח אותו מנורמל כחלק מהבסיס B. אם $\dim W = 2$ נבחר בסיס אורתונורמלי כלשהו B' של W. אזי כמובן $A = [T]_B$ היא מטריצה משית מסדר 2 ונורמלית, כי היא מייצגת טרנספורמציה נורמלית ביחס לבסיס אורתונורמלי. לכן היא מהצורה $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$, כאשר $b \neq 0$, או שהיא סימטרית, כלומר לכסינה ־ ואז בוחרים את B' להיות בסיס אורתונורמלי מלכסן.

מהנחת האינדוקציה, למרחב $W^\perp$ יש בסיס אורתונורמלי B'' שביחס אליו למטריצה המייצגת של T יש את הצורה הרצוייה. כעת ניקח $B = B' \cup B''$, ונקבל בסיס אורתונורמלי של V שביחס אליו המטריצה המייצגת נראית כמו שרוצים. ■

לסיום נשים לב שהמטריצה המייצגת מהצורה הזו היא יחידה, עד כדי סימני b_j, וזאת משום שניתן לקרוא את כל מה שרואים לאורך האלכסון מהפולינום האופייני של T:

$$f_T(x) = \prod_{i=1}^{k} (x - \lambda_i) \cdot \prod_{i=1}^{m} \left(x^2 - 2a_i x + a_i^2 + b_i^2\right)$$

כך נדע את λ_i ואת a_i בוודאות, ואת b_i עד כדי סימן.