אלגברה לינארית 2א

ארזים ©

2 ביוני 2016

ניזכר שהראינו את המשפט הספקטרלי לטרנספורמציות נורמליות. במשפט הנחנו שהפולינום האופייני מתפצל. מעל $\mathbb{C}$, ההנחה הזו מיותרת. מעל $\mathbb{R}$ היא הכרחית. ראינו שעבור טרנספורמציות צמודות לעצמן זה תמיד מתקיים. כעת נוכל לראות שזהו המקרה היחיד בו T נורמלית והפולינום האופייני מתפצל מעל $\mathbb{R}$. אכן, אם T נורמלית והפולינום האופייני מתפצל בממשיים, מהמשפט הספקטרלי קיים B אורתוגונלי כך שהמטריצה $A=[T]_B$ אלכסונית ממשית. לכן נקבל כי $A=A^t=\overline{A^t}=A^*$, לכן $[T]_B=A=A^*=[T^*]_B$, ולכן $T=T^*$. אותה הוכחה עובדת עבור מטריצות. בהמשך נראה מה בכל זאת ניתן לומר על טרנספורמציות לינאריות או מטריצות נורמליות שאינן סימטריות. בכל זאת ניתן לתת גרסה של המשפט, שאמנם לא יכולה לתת לכסון אורתוגונלי, אבל עדיין נותנת משהו מקביל וחזק.

נראה הוכחה נוספת למשפט הספקטרלי: **הוכחה:** תהי T כמו במשפט. כיוון שהפולינום האופייני מתפצל, ניתן לשלש את T. כלומר, קיים בסיס B כך שהמטריצה $[T]_B$ היא משולשית (בלי הגבלת הכלליות עליונה). כעת, ניתן לשדרג את הבסיס הזה לבסיס אורתונורמלי, כפי שראינו בתרגיל בית (גרם־שמידט). עתה, כיוון שהבסיס B הוא אורתוגונלי, המטריצה $A=[T]_B$ היא גם נורמלית. קיבלנו מטריצה משולשית שצמודה לעצמה. לפי תרגיל בית, נובע שהמטריצה A אלכסונית. ■

משפט 0.1 תהי $A\in M_n(\mathbb{C})$ נורמלית. אזי:

1. $A=A^*$ אם ורק אם כל הערכים העצמיים שלה ממשיים.
2. $A^*=A^{-1}$ אם ורק אם כל הערכים העצמיים שלה על מעגל היחידה.

הוכחה:

1. $\Leftarrow$: הוכחנו בעבר.
   $\Rightarrow$: מסקנה מהמשפט הספקטרלי.
2. $\Leftarrow$: הוכחנו בעבר.
   $\Rightarrow$: מהמשפט הספקטרלי, קיימת P אוניטרית שמקיימת שהמטריצה $D=P^{-1}AP$ היא אלכסונית. מההנחה שלנו, כל איברי האלכסון הם על מעגל היחידה. נקבל שהמטריצה D היא אוניטרית, ולכן $A=PDP^{-1}$ היא אוניטרית (מכפלה של אוניטריות היא אוניטרית).

■

דוגמה נביט במרחב $\mathbb{R}^2$ עם המכפלה הפנימית הסטנדרטית. תהי $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ הטרנספורמציה הלינארית המקיימת

$$\begin{aligned} T\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \\ T\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix} \end{aligned}$$

כעת, $B=\{u,v\}$ הוא בסיס לא אורתונורמלי של $\mathbb{R}^2$. נרצה לחשב את T^*v. נשים לב שאם T הייתה נורמלית, אזי מטענה שהוכחנו בהוכחת המשפט הספקטרלי נקבל שחייב להתקיים $T^*v=v$. אבל:

$$\begin{aligned} 1 &= \langle Tv,v\rangle = \langle v,T^*v\rangle = \left\langle \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right\rangle \Rightarrow x=1 \\ 2 &= \langle Tu,v\rangle = \langle u,T^*v\rangle = \left\langle \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right\rangle \Rightarrow y=1 \end{aligned}$$

קיבלנו כי $T^*v=u$. T אינה נורמלית! נביט במטריצות המייצגות:

$$\begin{aligned} A &= [T]_B = \begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix} \\ [T^*]_B &= \begin{pmatrix}0&-2\\1&3\end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix} = A^* \end{aligned}$$

בתרגיל הבית הקרוב תהיה נתונה מכפלה פנימית אחרת על $\mathbb{R}^2$, שביחס אליה יהיה צריך להוכיח שהטרנספורמציה T היא נורמלית (וסימטרית).

מקסנה מהמשפט הספקטרלי:

משפט 0.2 תהי T נורמלית מכל $\mathbb{C}$. אזיי קיימת טרנספורמציה לינארית R צמודה לעצמה וחיובית, וכן טרנספורמנציה לינארית U אוניטרית, שמקיימות $T=RU=UR$.

הערה 0.3 הוכחנו כבר כי כל T שעבורה קיימים R,U כאלה היא נורמלית.

תזכורת R חיובית אם לכל $v\in V$, $\langle Rv,v\rangle\geq 0$, וחיובית לחלוטין אם לכל $0\neq v\in V$, $\langle Rv,v\rangle>0$.

הוכחה: נשתמש במשפט הספקטרלי עבור T. יהי B בסיס אורתונורמלי של V כך שמתקיים

$$A=[T]_B=\begin{pmatrix}\lambda_1&&\\&\ddots&\\&&\lambda_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}r_1e^{i\theta_1}&&\\&\ddots&\\&&r_ne^{i\theta_n}\end{pmatrix}$$

באופן כללי, נסמן $\lambda_j = r_j e^{i\theta_j}$. כמו כן, מתקיים $r_j \geq 0$ לכל j. נגדיר

$$D = \begin{pmatrix} r_1 & & \\ & \ddots & \\ & & r_n \end{pmatrix}$$
$$C = \begin{pmatrix} e^{i\theta_1} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{i\theta_n} \end{pmatrix}$$

כעת, $D = D^*$ וחיובית, שכן r_j ממשי ואי־שלילי לכל j, וכן $C^{-1} = C^*$ שכן $\left|e^{i\theta_j}\right| = 1$ לכל j. כמו כן, $A = DC = CD$. כעת, נגדיר את R להיות הטרנספורמציה הלינארית שמקיימת $D = [R]_B$, ונגדיר את U להיות הטרנספורמציה הלינארית שמקיימת $C = [U]_B$. כעת, משום שהבסיס B הוא אורתונורמלי, נקבל $R = R^*$, $U^{-1} = U^*$. כמו כן,

$$\begin{aligned} A &= DC = CD \\ [T]_B &= [R]_B [U]_B = [U]_B [R]_B \\ [T]_B &= [RU]_B = [UR]_B \\ T &= RU = UR \end{aligned}$$

■

נשים לב שאם $r_i > 0$ לכל i, אזי $\lambda_i \neq 0$ לכל i - ה קורה בדיוק כאשר T הפיכה, ובמצב זה R תהיה חיובית לחלוטין.

לפירוק הזה, $T = RU$, קוראים הפירוק הפולארי של T. הוא קיים גם במקרה הכללי, אלא שאז R, U לאו דווקא יתחלפו. אנו נוכיח זאת רק למקרה שבו T הפיכה (ונקבל R צמודה לעצמה וחיובית לחלוטין). כאשר T הפיכה הפירוק יחיד, ואחרת, R הוא יחיד, אבל U לא בהכרח. **הוכחה:** נביט בטרנספורמציה $S = TT^*$. היא מקיימת $S^* = S$, וכן חיובית לחלוטין, שכן לכל $v \neq 0$,

$$\langle Sv, v\rangle = \langle TT^* v, v\rangle = \langle T^* v, T^* v\rangle = ||T^* v|| > 0$$

וזאת משום שאם T הפיכה אזי T^* הפיכה. כל הערכים העצמיים של S הם ממשיים וחיוביים. מהמשפט הספקטרלי, קיים בסיס אורתונורמלי B של V כך שמתקיים

$$[S]_B = \begin{pmatrix} s_1 & & \\ & \ddots & \\ & & s_n \end{pmatrix}$$

נגדיר את R להיות הטרנספורמציה הלינארית שמקיימת

$$[R]_B = \begin{pmatrix} \sqrt{s_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \sqrt{s_n} \end{pmatrix}$$

כאשר בכל מקום שיש בו שורש ניקח את השורש החיובי. כעת, מתקיים

$$\begin{aligned} [S]_B &= [R]_B^2 = \left[R^2\right]_B \\ S &= R^2 \end{aligned}$$

כמובן, R חיובית לחלוטין וצמודה לעצמה.
כעת, נגדיר את U באופן הבא:

$$U := R^{-1}T$$

כל שנותר הוא לבצע חישוב ישיר, ולמצוא שהמטריצה U היא אוניטרית:

$$UU^* = R^{-1}T\left(R^{-1}T\right)^* = R^{-1}TT^*\left(R^{-1}\right)^* = R^{-1}R^2R^{-1} = I$$

■