אלגברה לינארית 2א

ⓒ ארזים

24 במאי 2016

משפט 0.1 (המשפט הספקטרלי עבור טרנספורמציות צמודות לעצמן) תהי T טרנספורמציה לינארית צמודה לעצמה במרחב מכפלה פנימית V מעל $\mathbb{F} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. אזי קיים בסיס אורתונורמלי של V שמורכב מווקטורים עצמיים של T. בפרט, אם $T = T^*$, אזי T ניתנת ללכסון, הן במקרה המרוכב הן במקרה הממשי.

הוכחה: לשם ההוכחה נוכיח ראשית טענה שמראה את השימוש בהנחה:

למה 0.2 תהי $S = S^*$, ויהי $v \in V$. אם $S^2 v = 0$ אזי $Sv = 0$.

הוכחה:

$$0 = \left\langle S^2 v, v \right\rangle = \left\langle Sv, S^* v \right\rangle = \left\langle Sv, Sv \right\rangle = ||Sv||^2$$

ולכן $Sv = 0$. ■

מסקנה 0.3 אם λ ערך עצמי של טרנספורמציה לינארית צמודה לעצמה, ומתקיים $(T - \lambda I)^2 v = 0$, אזי $(T - \lambda I) v = 0$.

הוכחה: הוכחנו שערך עצמי של T כזו הוא בהכרח ממשי. נביט בהעתקה $S = T - \lambda I$. נקבל כי

$$S^* = (T - \lambda I)^* = T^* - (\lambda I)^* = T - \overline{\lambda} I = T - \lambda I = S$$

(זהו למעשה מקרה פרטי של טענה כללית קלה: הפרש או סכום של טרנספורמציות צמודות לעצמן הוא גם כן צמוד לעצמו). כעת יש להוכיח כי $S^2 v = 0 \Rightarrow Sv = 0$, וזו בדיוק הלמה הקודמת. ■

כעת נוכל להוכיח את המשפט - נוכיח ראשית שניתן ללכסן, ביחס לבסיס כלשהו. נשים לב שהוכחנו שגם במקרה $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, הפולינום האופייני של T מתפצל למכפלת גורמים לינאריים מעל $\mathbb{F}$ (שכן כל הערכים העצמיים הם ממשיים).

כעת נזכור כי במצב זה, T ניתנת ללכסון אם ורק אם לכל ערך עצמי λ של T מתקיים $\widetilde{V}_\lambda = V_\lambda$. ניזכר בהגדרות:

$$\begin{aligned} \widetilde{V}_\lambda &= \{v \in V \mid \exists m. (T - \lambda I)^m v = 0\} \\ V_\lambda &= \{v \in V \mid (T - \lambda I) v = 0\} \end{aligned}$$

ניזכר כי T ניתנת ללכסון אם ורק אם $V=\bigoplus V_\lambda$, בעוד שתמיד מתקיים, תחת ההנחה שהפולינום האופייני מתפצל, כי $V=\bigoplus \widetilde{V}_\lambda$ ־ זו מסקנה ממשפט הפירוק הפרימרי.

לסיום ההוכחה, נשים לב שבמקרה שבו $T=T^*$ אכן מתקיים $\widetilde{V}_\lambda=V_\lambda$ לכל λ. אחרת קיים $u\in\widetilde{V}_\lambda\backslash V_\lambda$, שיקיים $(T-\lambda I)^m u=0$ עבור $m\geq 2$ כלשהו, וכן כי $(T-\lambda I)u\neq 0$. נוכיח להניח כי m הוא המינימלי שמקיים זאת. עתה, נביט בווקטור $v=(T-\lambda I)^{m-2}u$. כעת מתקיים כי $(T-\lambda I)^2 v=(T-\lambda I)^m u=0$, וכן $(T-\lambda I)v=(T-\lambda I)^{m-1}u\neq 0$, שכן m היה מינימלי ־ וזו סתירה למסקנה מן הלמה.

כעת, כדי לסיים את ההוכחה, יש להראות מדוע קיים בסיס אורתונורמלי מלכסן. העובדה הבסיסית האחראית לכך היא הטענה הבאה (מן התרגיל):

טענה 0.4 אם $T=T^*$, $Tv=\alpha v$, $Tu=\beta u$, $\alpha\neq\beta$, אזי $u\perp v$.

עתה, לכל ערך עצמי λ של T, נמצא בעזרת תהליך גרם־שמידט בסיס אורתונורמלי של V_λ. איחוד הבסיסים הללו יהיה בסיס אורתונורמלי של V שמלכסן את T (שכן הניצבות של וקטורים עצמיים עם ערכים עצמיים שונים מובטחת לנו מהטענה).

בזאת סיימנו את הוכחת המשפט הסקטרלי לסטרנספורמציות שצמודות לעצמן. ■

נשים לב שכאשר $A=A^*$ (מטריצות) המשפט אומר שקיימת P הפיכה כך שהמטריצה $P^{-1}AP$ אלכסונית, ועמודות P הן בסיס אורתונורמלי של $\mathbb{F}^n$ (ביחס למכפלה הפנימית הסטנדרטית). תת הפרק הבא שלנו עוסק בהבנת מטריצות מהצורה הנ"ל ־ מטריצות אוניטריות (מעל $\mathbb{C}$) או אורתוגונליות (מעל $\mathbb{R}$).

1 טרנספורמציות אוניטריות/אורתוגונליות

הגדרה 1.1 יהי V מרחב מכפלה פנימית מעל $\mathbb{F}\in\{\mathbb{R},\mathbb{C}\}$, ותהי $T:V\to V$ טרנספורמציה לינארית. T נקראת <u>אוניטרית</u> (מעל $\mathbb{C}$) או <u>אורתוגונלית</u> (מעל $\mathbb{R}$) אם היא הפיכה, וכן מתקיים $T^*=T^{-1}$. במילי אחרות, $TT^*=T^*T=I$.

דוגמא אם $Tv=\lambda v$, $T^*v=\overline{\lambda}v$. כדי לקבל T אוניטרית צריך להתקיים $T=T^{-1}$, כלומר $\overline{\lambda}=\lambda^{-1}$, כלומר $|\lambda|^2=\lambda\overline{\lambda}=1$.

מעל $\mathbb{R}$ ־ $\lambda=\pm 1$.

מעל $\mathbb{C}$ ־ $\lambda=e^{i\theta}$.

דוגמא הסברנו את הדוגמא הזו בעבר ־ לכל זווית $0\leq\theta<2\pi$, נגדיר T_θ ־ סיבוב בזווית θ במישור $\mathbb{R}^2$. כעת טרנספורמציה זו היא אורתוגונלית, שכן $\langle T_\theta v,u\rangle=\langle v,T_{-\theta}u\rangle$, ומתקיים $T_{-\theta}=(T_\theta)^{-1}$.

זאת משום שהמכפלה הפנימית הסטנדרטית היא פונקציה של הזווית בין הווקטורים והאורך שלהם ־ גדלים שלא משתנים תחת סיבוב.

דוגמא (חשובה) שיקוף במישור $\mathbb{R}^2$ ביחס לציר כלשהו סביב הראשית. נדבר על כך יותר בהקשר של הדיון במטריצות אוניטריות ואורתוגונליות.

טענה 1.2 עבור טרנספורמציה לינארית $T:V\to V$, כאשר V מרחב מכפלה פנימית מעל $\mathbb{F}\in\{\mathbb{R},\mathbb{C}\}$. התנאים הבאים שקולים:

1. T אוניטרית/אורתוגונלית.

2. $\langle Tv, Tu\rangle = \langle v, u\rangle \quad \forall u, v \in V$ (כלומר T שומרת על המכפלה הפנימית).
3. $||Tv|| = ||v|| \quad \forall v \in V$ (כלומר T שומרת על הנורמה).

הוכחה: $1 \Leftarrow 2$:

$$\langle Tv, Tu\rangle = \langle v, T^*Tu\rangle = \langle v, Iu\rangle = \langle v, u\rangle$$

$2 \Leftarrow 3$:

$$||Tv||^2 = \langle Tv, Tv\rangle = \langle v, v\rangle = ||v||^2$$

$3 \Leftarrow 1$: נסמן $S = T^*T - I$, ונרצה להראות שמתקיים $S = 0$. נשים לב כי

$$S^* = (T * T - I)^* = (T^*T)^* - I^* = T^*(T^*)^* - I = T^*T - I = S$$

כעת,

$$\begin{aligned} ||v||^2 &= \langle v, v\rangle = ||Tv||^2 = \langle Tv, Tv\rangle = \langle v, T^*Tv\rangle \\ \langle v, v\rangle &= \langle v, T^*Tv\rangle \\ \langle v, T^*Tv - v\rangle &= 0 \\ \langle v, Sv\rangle &= 0 \\ \langle Sv, v\rangle &= 0 \end{aligned}$$

וזאת לכל $v \in V$. כמו כן, $S = S^*$, ולכן מטענה שראינו בעבר מתקיים $S = 0$. ■

בהסתכלות גיאומטרית, המשמעות של תנאי 3 בטענה היא שהטרנספורמציה שומרת על מרחקים.

הערה 1.3 בעוד שטרנספורמציות לינאריות צמודות לעצמן היו סגורות תחת סכום והפרש, הן לא סגורות תחת הרכבה. לעומת זאת, טרנספורמציות אורתוגונליות/אוניטריות סגורות תחת הרכבה אך לא תחת סכום או הפרש. למשל, I אוניטרית, אבל $I - I = 0$, $I + I = 2I$ שתיהן לא אוניטריות. עבור הרכבה, לעומת זאת, מתקיים

$$(TS)^*(TS) = (S^*T^*)(TS) = S^*(T^*T)S = S^*IS = S^*S = I$$

באופן דומה, אם T אונטרית/אורתוגונלית אזי כך גם ההופכית שלה, שכן

$$\left(T^{-1}\right)^* T^{-1} = (T^*)^{-1} T^* = I$$

משפט 1.4 התנאים הבאים על T שקולים:

1. T אוניטרית/אורתוגנלית.
2. T מעבירה כל בסיס אורתונורמלי של V לבסיס אורתונורמלי של V.
3. קיים בסיס אורתונורמלי של V שתמונתו תחת T היא בסיס אורתונורמלי של V.

הוכחה: $1 \Leftarrow 2$:
תהי T אוניטרית/אורתוגונלית ויהי $\{e_i\}$ בסיס אורתונורמלי של V. נסמן $\varepsilon_i = Te_i$.

$$\langle \varepsilon_i, \varepsilon_j \rangle = \langle Te_i, Te_j \rangle = \langle e_i, e_j \rangle = \delta_{i,j}$$

ולכן גם $\{\varepsilon_i\}$ בסיס אורתונורמלי של V.
$2 \Leftarrow 3$: טריוויאלי.
$3 \Leftarrow 1$:
יהי $\{e_i\}$ הבסיס האורתונורמלי שעבור ידוע כי $\{Te_i\}$ הוא גם כן בסיס אורתונורמלי, כלומר מתקיים

$$\langle e_i, e_j \rangle = \langle Te_i, Te_j \rangle = \delta_{i,j}$$

שוב, נסמן $\varepsilon_i = Te_i$. נבצע חזרה מדוייקת על ההוכחה בטענה הקודמת של $3 \Leftarrow 1$ עבור הווקטורים הללו: נסמן $S = T^*T - I$. חישוב זהה לקודם נותן:

$$\begin{aligned}
\delta_{i,j} &= \langle e_i, e_j \rangle = \langle Te_i, Te_j \rangle = \langle e_i, T^*Te_j \rangle \\
\langle e_i, (T^*T - I)\, e_j \rangle &= 0 \\
\langle e_i, Se_j \rangle &= 0 \\
\langle Se_i, e_j \rangle &= 0
\end{aligned}$$

וזאת עבור כל i, j. כמו קודם, נרצה להראות כי $S = 0$. ידוע לנו כי $\langle Se_i, e_j \rangle = 0$ לכל i, j ושימוש בלינאריות מאפשר להעביר את העובדה הזו לכל שני ווקטורים u, v:

$$\begin{aligned}
v &= \sum a_i e_i \\
u &= \sum b_j e_j \\
\langle Sv, u \rangle &= \left\langle \sum a_i Se_i, \sum b_j e_j \right\rangle = \sum_{i,j} a_i \overline{b_j} \langle Se_i, e_j \rangle = 0
\end{aligned}$$

לכן $\langle Sv, u \rangle = 0$ לכל $v, u \in V$. נבחר $u = Sv$ ונקבל $\langle Sv, Sv \rangle = ||Sv||^2 = 0$ לכל $v \in V$, כלומר לכל $v \in V$ מתקיים $Sv = 0$, ולכן $S = 0$. ■

טענה 1.5 אם T אוניטרית/אורתוגונלית, כל ערך עצמי λ שלה מקיים $|\lambda| = 1$.

הוכחה: עבור v ווקטור עצמי עם ערך עצמי λ מתקיים

$$\begin{aligned}
|\lambda|\, ||v|| &= ||Tv|| = ||v|| \\
|\lambda| &= 1
\end{aligned}$$

■

הגדרה 1.6 תהי $A \in M_n(\mathbb{F})$. A נקראת <u>אוניטרית</u> (מעל $\mathbb{C}$) או <u>אורתוגונלית</u> (מעל $\mathbb{R}$) אם

$$A^*A = AA^* = I$$

דוגמא $A = \lambda I$, $|\lambda| = 1$, $A^* = \lambda^{-1}I$.

דוגמא סיבוב של θ: $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$. $A^* = A^t = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ - וכעת

$$AA^* = A^*A = I$$