אלגברה לינארית 2א

ⓒ ארזים

19 במאי 2016

הראינו כי במרחב מכפלה פנימית, לכל טרנספורמציה T ישנה טרנספורמציה צמודה T^* המקיימת

$$\langle Tv, u\rangle = \langle v, T^*u\rangle$$

כמו כן, עבור $\mathbb{F}\in\{\mathbb{R}/\mathbb{C}\}$, $A\in M_n(\mathbb{F})$, הגדרנו $A^*=\overline{A^t}$, והוכחנו כי $(T_A)^*=T_{A^*}$.

משפט 0.1 תהי $T:V\to V$ טרנספורמציה לינארית ויהי $B=\{e_i\}$ בסיס אורתונורמלי של V. אם $A=[T]_B$ אזי $A^*=[T^*]_B$.

הערה 0.2 קריטי כאן שעובדים עם בסיס אותונורמלי ולא סתם בסיס של V.

הוכחה: נזכר במטריצה $A=(a_{ij})$, המוגדרת על ידי

$$a_{ij}=(Te_j)_i=\left(\sum_{k=1}^{n}a_{kj}e_k\right)_i$$

משום שהבסיס שלנו אורתונורמלי ומתוצאה שראינו בעבר מתקיים

$$a_{ij}=\langle Te_j, e_i\rangle$$

מאותה נוסחה בדיוק, אם $C=(c_{ij})$ היא המטריצה שמייצגת את T^*, אזי מתקיים

$$c_{ij}=\langle T^*e_j, e_i\rangle$$

ולכן, אם נחשב, נקבל

$$c_{ij}=\langle T^*e_j, e_i\rangle=\left\langle e_j, (T^*)^*e_i\right\rangle=\langle e_j, Te_i\rangle=\overline{\langle Te_i, e_j\rangle}=\overline{a_{ji}}$$

כפי שרצינו - זה מוכיח את המשפט. ■

נשים לב שבפרט, התוצאה נותנת לנו שאם $T=T_A$, $A\in M_n(\mathbb{F})$, וכן $\{e_i\}$ הוא הבסיס הסטנדרטי של $\mathbb{F}^n$ עם מכפלה פנימית סטנדרטית (שהוא כמובן אורתונורמלי) אזי

$$\left[(T_A)^*\right]_B=A^*$$

מעתה נחקור יותר לעומק טרנספורמציות לינאריות T המקיימות קשרים מיוחדים בין T, T^*.

הגדרה 0.3 טרנספורמציה לינארית $T: V \to V$ על מרחב מכפלה פנימית V מעל $\mathbb{F}$ נקראת <u>צמודה לעצמה</u> (מעל $\mathbb{C}$ - הרמיטית, מעל $\mathbb{R}$ - סימטרית) אם $T = T^*$.

ראינו כבר דוגמה כזו - גזירה פעמיים במרחב הפונקציות בעלות מחזור 1 וגזירות אינסוף פעמים, כאשר

$$\langle f, g\rangle = \int_0^1 fg$$

באופן מפורש, T צמודה לעצמה אם לכל $u, v \in V$ מתקיים

$$\langle Tv, u\rangle = \langle v, Tu\rangle$$

דוגמה נוספת: $Tv = \lambda v$ צמודה לעצמה אם ורק אם $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\langle Tv, u\rangle = \langle \lambda v, u\rangle = \lambda \langle v, u\rangle = \langle v, \overline{\lambda} u\rangle$$

וכעת צריך $\lambda = \overline{\lambda}$, כלומר $\lambda \in \mathbb{R}$.

באופן אנאלוגי, מגדירים גם אנטי הרמיטיות, או אנטי סימטריות - כאשר מתקיים $T^* = -T$.

דוגמה - גזירה פעם אחת בדוגמה הקודמת, $Tv = \lambda v$ כאשר $\lambda \in i \cdot \mathbb{R}$ מדומה טהור.

טענה 0.4 נניח $T = T^*$. אם לכל v מתקיים $\langle Tv, v\rangle = 0$, אזי $T \equiv 0$.

הוכחה: יהיו $u, v \in V$ כלשהם. מהנתון על T מתקיים

$$\begin{aligned} \langle Tv, v\rangle &= 0 \\ \langle Tu, u\rangle &= 0 \\ \langle T(u+v), u+v\rangle &= 0 \end{aligned}$$

נפתח את השוויון השלישי:

$$\begin{aligned} 0 &= \langle T(u+v), u+v\rangle = \langle Tu + Tv, u+v\rangle = \cancel{\langle Tu, u\rangle} + \langle Tv, u\rangle + \cancel{\langle Tv, v\rangle} + \langle Tu, v\rangle = \\ &= \langle Tv, u\rangle + \langle u, T^* v\rangle = \langle Tv, u\rangle + \langle u, Tv\rangle \end{aligned}$$

כעת ניקח $u = Tv$, ונקבל

$$\begin{aligned} 0 &= \langle Tv, u\rangle + \langle u, Tv\rangle = \langle Tv, Tv\rangle + \langle Tv, Tv\rangle = 2\,||Tv||^2 \\ &\Rightarrow \quad Tv = 0 \Rightarrow T \equiv 0 \end{aligned}$$

■

מסקנה 0.5 נניח $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ ותהי $T : V \to V$ כלשהי. אם $\langle Tv, v\rangle = 0$ לכל $v \in V$ אזי $T \equiv 0$.

הוכחה: נשים לב שלכל T הטרנספורמציה $S = T + T^*$ צמודה לעצמה:

$$S^* = (T + T^*)^* = T^* + (T^*)^* = T^* + T = S$$

ונשים לב עתה כי לכל $v \in V$ מתקיים

$$\langle Sv, v\rangle = \langle (T + T^*)\, v, v\rangle = \langle Tv, v\rangle + \langle T^* v, v\rangle = \cancel{\langle Tv, v\rangle} + \cancel{\langle v, Tv\rangle} = 0$$

לכן, מהטענה הקודמת, נקבל כי $S \equiv 0$, כלומר $T + T^* \equiv 0$.

נשים לב כי הטרנספורמציה $R = T - T^*$, מאותו חישוב כמו קודם בדיוק, מקיימת גם כן לכל $v \in V$

$$\langle Rv, v\rangle = 0$$

הבעיה היא שטרנספורמציה זו לא צמודה לעצמה:

$$R^* = (T - T^*)^* = T^* - T = -R$$

הטריק הוא להביט בטרנספורמציה $i \cdot R$. היא כן צמודה לעצמה, שכן לכל T ולכל סקלר λ מתקיים $(\lambda T)^* = \overline{\lambda} T^*$. כשנפעיל זאת עבור $T = R, \lambda = i$, נקבל

$$(iR)^* = \overline{i} R^* = (-i)\,(-R) = iR$$

כמו כן, לכל $v \in V$ מתקיים $\langle iRv, v\rangle = i\,\langle Rv, v\rangle = 0$, ולכן מהטענה הקודמת מתקיים $iR \equiv 0$, ולכן $R \equiv 0$.

בסך הכל קיבלנו

$$\begin{aligned} T + T^* &\equiv 0 \\ T - T^* &\equiv 0 \\ 2T &\equiv 0 \\ T &\equiv 0 \end{aligned}$$

■

הערה 0.6 לא עובד מעל $\mathbb{R}$: נשים לב שטרנספורמציית הסיבוב בתשעים מעלות במרחב $V = \mathbb{R}^2$ עם מכפלה פנימית סטנדרטית, לכל v מתקיים $Tv \perp v$.

נשים לב גם שסיבוב בתשעים מעלות אינה צמודה לעצמה ולכן זו לא דוגמה נגדית לטענה הקודמת. הטרנספורמציה הזו למעשה מקיימת כי $T^* = T^{-1}$. על משפחה זו של טרנספורמציות נרחיב בהמשך.

משפט 0.7 יהי $\mathbb{F}=\mathbb{C}$. אזי $T=T^*$ אם ורק אם $\langle Tv,v\rangle\in\mathbb{R}$ לכל $v\in V$.

הוכחה: מצד אחד, אם $T=T^*$, אזי לכל $v\in V$ מתקיים

$$\overline{\langle Tv,v\rangle}=\overline{\langle v,T^*v\rangle}=\overline{\langle v,Tv\rangle}=\langle Tv,v\rangle\Rightarrow\langle Tv,v\rangle\in\mathbb{R}$$

מצד שני, נניח כי לכל $v\in V$ מתקיים $\langle Tv,v\rangle\in\mathbb{R}$. נביט בטרנספורמציה $S=T-T^*$, ונרצה להראות כי $S\equiv 0$. לפי המסקנה הקודמת מספיק להראות כי $\langle Sv,v\rangle=0$ לכל $v\in V$. ואכן, מתקיים

$$\langle Sv,v\rangle=\langle (T-T^*)\,v,v\rangle=\langle Tv,v\rangle-\langle T^*v,v\rangle=\langle Tv,v\rangle-\langle v,Tv\rangle=\langle Tv,v\rangle-\overline{\langle Tv,v\rangle}=0$$

וזאת משום שהנחנו $\langle Tv,v\rangle\in\mathbb{R}\Rightarrow\overline{\langle Tv,v\rangle}=\langle Tv,v\rangle$. ■

הגדרה 0.8 טרנסורמציה לינארית T צמודה לעצמה נקראת <u>חיובית</u> אם $\langle Tv,v\rangle>0$ לכל $0\neq v\in V$, ונקראת <u>אי־שלילית</u> אם $\langle Tv,v\rangle\geq 0$ לכל $v\in V$.

דוגמה לכל טרנספורמציה לינארית T במרחב מכפלה פנימית, הטרנספורמציה $S=T^*T$ היא צמודה לעצמה ואי־שלילית. היא חיובית אם T הפיכה.

הוכחה: ראשית,

$$(T^*T)^*=T^*\left(T^*\right)^*=T^*T$$

ולכן היא אכן צמודה לעצמה. חיוביות:

$$\langle T^*\left(Tv\right),v\rangle=\langle Tv,Tv\rangle=||Tv||^2\geq 0$$

אם T חד־חד־ערכית, כלומר הפיכה, אזי $||Tv||>0$ לכל $v\neq 0$. ■

טענה 0.9 תהי $T=T^*$. אזי כל ערך עצמי של T הינו ממשי. אם בנוסף T אי־שלילית/חיובית, אזי כל ערך עצמי הוא אי־שלילי/חיובי בהתאם.

הוכחה: נניח כי v ווקטור עצמי של T עם ערך עצמי λ, כלומר $Tv=\lambda v$. מצד אחד הוכחנו כי $\langle Tv,v\rangle\in\mathbb{R}$ ומצד שני

$$\langle Tv,v\rangle=\langle\lambda v,v\rangle=\lambda\left\langle v,v\right\rangle=\lambda\left||v|\right|^2\in\mathbb{R}$$

ולכן $\lambda\in\mathbb{R}$. כמו כן, ברור שאם מניחים בנוסף כי T אי־שלילית/חיובית, אזי נובע מחישוב זה כי λ אי־שלילי/חיובי, בהתאמה. ■

הגדרה 0.10 יהי $\mathbb{F}\in\{\mathbb{R},\mathbb{C}\}$, ותהי $A\in M_n\left(\mathbb{F}\right)$. A נקראת <u>צמודה לעצמה</u> (הרמיטית מעל $\mathbb{C}$, סימטרית מעל $\mathbb{R}$) אם $A=A^*$.

טענה 0.11 תהי $T:V\to V$ טרנספורמציה לינארית במרחב מכפלה פנימית V מעל $\mathbb{F}\in\{\mathbb{R},\mathbb{C}\}$, ויהי $B=\{e_i\}$ בסיס אורתונורמלי של V. תהי $A=[T]_B$. אזי מתקיים

$$T=T^* \iff A=A^*$$

הוכחה: הוכחנו כי $[T^*]_B=A^*$ (בזכות ההנחה כי B אורתונורמלי). תמיד מתקיים $[T]_B=[S]_B$ אם ורק אם $T=S$. נפעיל זאת עבור $S=T^*$ ונקבל

$$T=T^* \iff [T]_B=[T^*]_B \iff [T]_B=\left([T]_B\right)^* \iff A=A^*$$

■

מסקנה מהטענה האחרונה היא שטרנספורמציה T_A צמודה לעצמה במרחב $\mathbb{F}^n$ עם מכפלה פנימית סטנדרטית $\iff$ A צמדוה לעצמה. זה נובע מהטענה שהראינו עכשיו עם הבסיס הסטנדרטי.

אם המושגים של אי־שליליות/חיוביות של A שצמודה לעצמה מגדירים באופן דומה לזה שעשנו לטרנספורמציות לינאריות. באופן פורמלי: A אי־שלילית/חיובית אם T_A היא כזו כטרנספורמציה לינארית על $\mathbb{F}^n$ עם מכפלה פנימית סטנדרטית.

באופן מפורש, אם $A=A^*$, אזי אי־שליליות משמעה

$$\forall v\in\mathbb{F}^n \;\; \langle Av,v\rangle\geq 0$$

וחיוביות משמעה

$$\forall 0\neq v\in\mathbb{F}^n \;\; \langle Av,v\rangle > 0$$

כאשר $\langle,\rangle$ היא המכפלה הפנימית הסטנדרטית.

הערה 0.12 נשים לב שאם $A\in M_n(\mathbb{R})$ אזי A צמודה לעצמה $\iff$ $A=A^t$ - סימטריה במובן הרגיל.

משפט 0.13 אם $A=A^*$ אזט כן הערכים העצמיים של A הם ממשיים (וכמובן שאי־שליליים או חיוביים תחת ההנחה המתאימה על A).

הוכחה: זו מסקנה מהדיון בטרנספורמציות לינאריות שצמודות לעצמן: ביחס לבסיס הסטנדרטי B, מתקיים $A=[T_A]_B$. הוכחנו (בעבר הרחוק) שלמטריצה A ולטרנספורמציה T_A יש את אותם ערכים עצמיים. עוד יודעים כי $A=A^*$, ולכן $T_A=T_A^*$. כעת, T_A צמודה לעצמה, ולכן יש לה רק ערכים עצמיים ממשיים, כפי שהוכחנו קודם. מכאן שגם הערכים העצמיים של A הם ממשיים. באותו אופן נובעת האי־שליליות/חיוביות של הערכים העצמיים. ■

מסקנה 0.14 הערכים העצמיים של מטריצה ממשית וסימטרית הם כולם ממשיים.