אלגברה לינארית 2א

© ארזים

1 במרץ 2016

1 ווקטורים וערכים עצמיים

בשיעור שעבר הוכחנו כי כל קבוצה של ווקטורים עצמיים עם ערכים עצמיים שונים היא בלתי תלויה לינארית.

מסקנה 1.1 אם $n = \dim V$ אזי לטרנספונרמציה $T : V \to V$ יש לכל היותר n ערכים עצמיים שונים.

הוכחה: במרחב ווקטורי ממימד n כל קבוצה A בעלת יותר מאשר n ווקטורים היא תלויה לינארית. ■

מסקנה 1.2 אם יש לטרנספורמציה T n ערכים עצמיים שונים, אזי T היא לכסינה (ניתנת ללכסון), כלומר קיימת מטריצה אלכסונית המייצגת את T ביחס לבסיס מסויים של V. ראינו כבר שזה שקול לכך שקיים בסיס של V המורכב מווקטורים עצמיים של T.

הוכחה: נובע מידית מן המשפט מהשיעור שעבר (קבוצה של ווקטורים עצמיים עם ערכים עצמיים שונים היא בלתי תלויה) ומכך שאם $n = \dim V$ אזי כל קבוצה בלתי תלוייה של n ווקטורים מהמרחב היא בסיס שלו. ■

הערה 1.3 ייתכן שטרנספורמציה T לכסינה ולא כל הערכים העצמיים שלה שונים זה מזה, כמו למשל טרנספורמציית הזהות - שם $\lambda = 1$ הוא ערך עצמי יחיד.

נזכר שהגדרנו לכל סקלר $\lambda \in F$ את המרחב העצמי שלו:

$$V_\lambda = \{v \mid T(v) = \lambda v\} = \ker(T - \lambda I)$$

זוהי קבוצת כל הווקטורים העצמיים של T עם ערך עצמי λ בתוספת ווקטור האפס. אם λאינו ערך עצמי, המרחב העצמי יהיה מרחב האפס.

מסקנה 1.4 תהי $T : V \to V$ טרנספורמציה לינארית, ונניח שלכל ערך עצמי λ של T, $B_\lambda \subseteq V_\lambda$ היא תת קבוצה בלתי תלויה לינארית. אזי הקבוצה

$$B = \bigcup_\lambda B_\lambda$$

היא קבוצה בלתי תלויה לינארית. נשים לב שזוהי הכללה של המשפט, שכן שם מדובר על מצב בו כמות הווקטורים בכל B_λ הוא בדיוק אחד.

הוכחה: נניח שקיים צירוף לינארי של איברי B שמתאפס:

$$a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_mv_m + \cdots + a_kv_k + \cdots + a_rv_r = \theta$$

יש להוכיח שכל המקדמים בו מתאפסים. נקבץ את המחוברים בקבוצות לפי כל ערך עצמי בתוך הצירוף הלינארי שלנו. לכל ערך עצמי λ נגדיר את u_λ להיות אותו חלק מן הצירוף הלינארי שמחבר רק ווקטורים מתוך B_λ.
כך הצירוף המקורי הופך להיות:

$$u_{\lambda_1} + u_{\lambda_2} + \cdots + u_{\lambda_m} = \theta$$

כאשר כל $u_{\lambda_i} \in V_{\lambda_i}$, ולכל $i \neq j$ מתקיים $\lambda_i \neq \lambda_j$. מהמשפט שהוכחנו לא ייתכן שיש איזשהו u_{λ_i} אינו ווקטור האפס, אחרת היינו מקבלים תלות לינארית בין ווקטורים עצמיים עם ערכים עצמיים שונים.
לכן לכל i מתקיים $u_{\lambda_i} = \theta$. עתה נשתמש בהנחה שבתוך כל B_{λ_i} הווקטורים הם בלתי תלויים, ומכאן שהמקדמים בצירוף הלינארי שמגדיר כל u_{λ_i} הם אפסים, ובסך הכל כל המקדמים בצירוף הלינארי המקורי הם אפסים. ■

מסקנה 1.5 תהי $T : V \to V$ טרנספורמציה לינארית, $\dim V = n$. אזי מתקיים

$$\sum_\lambda \dim V_\lambda \leq n$$

והשוויון מתקיים אם ורק אם Tלכסינה.

הוכחה: לכל λ נבחר בסיס B_λ. נסמן $n_\lambda = \dim V_\lambda = |B_\lambda|$. ראשית נוכיח את אי השוויון: נסמן

$$B = \bigcup_\lambda B_\lambda$$

אזי אגף שמאל של אי השוויון הוא כמות איברי B, ומהמסקנה הקודמת קבוצה זו היא בלתי תלויה לינארית, ולכן מכילה לכל היותר n ווקטורים. בכך הוכחנו את אי השוויון.
כעת, אם מתקיים שוויון, אזי $|B| = n$ולכן B הוא בסיס. כלומר מצאנו בסיס המורכב מווקטורים עצמיים של T, כלומר T לכסינה.
אם T לכסינה, קיים למרחב V בסיס המורכב מווקטורים עצמיים של T, שנסמנו B'. נכתוב את B' כאיחוד זר של קבוצות וקטורים עצמיים עם ערכים עצמיים שונים:

$$B' = \bigcup_i B_{\lambda_i}$$

אזי לכל i מתקיים $\dim V_{\lambda_i} \geq |B_{\lambda_i}|$, שכן בכל B_{λ_i} הווקטורים הם בלתי תלויים לינארית (תת קבוצה של קבוצה בלתי תלויה לינארית).
כעת נסכום על פני כל הערכים העצמיים, ומכך שכתבנו את B' כאיחוד זר, נובע:

$$\sum_i V_{\lambda_i} \geq \sum_i |B_{\lambda_i}| = |B'| = n$$

וזהו אי שוויון הפוך מזה שהוכחנו קודם, ולכן בסך הכל נקבל שוויון. ■

נשים לב כי מן ההוכחה נובע, באותם סימונים,

$$\dim V_{\lambda_i} = |B_{\lambda_i}|$$

זאת משום שקיבלנו חסימות של הסכום משני הכיוונים, ולכן אם השוויון יישבר במקום אחד, נקבל אי שוויון חזק, בסתירה לאי השוויון הראשון שהוכחנו.

מסקנה 1.6 נניח שהטרנספורמצהי T לכסינה כך שביחס לבסיס B של V ההצגה המטריציונית שלה היא

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

כאשר לא בהכרח λ_i שונים זה מזה. אזי כל ערך עצמי של T מופיע בתוך הרשימה של λ_i באלכסון.

הוכחה: נניח בשלילה שקיים ערך עצמי נוסף α שאינו באלכסון. יהי u ווקטור עצמי עם ערך עצמי α. אזי $B \cup \{u\}$ היא קבוצה בלתי תלוייה לינארית לפי המסקנות הקדומות, ויש בה יותר איברים מאשר המימד של המרחב, בסתירה. ■

2 וקטורים וערכים עצמיים של מטריצות

הגדרה 2.1 תהי $A \in M_n(F)$ מטריצה ריבועית $n \times n$ מעל שדה F. אזי ווקטור $\theta \neq v = (x_1, \dots, x_n)^t \in F^n$ ייקרא <u>ווקטור עצמי</u> של A (ו"ע) אם קיים סקלר $\lambda \in F$ כך שמתקיים

$$Av = \lambda v$$

λ ייקרא <u>הערך העצמי</u> של v, ונקבע באופן יחיד, בדיוק כמו במקרה של טרנספורמציות לינאריות.

נשים לב שזהו למעשה מקרה פרטי של ההגדרה עבור טרנספורמציות לינאריות, כאשר מתבוננים בטרנספורמציה $T_A : F^n \to F^n$ המוגדרת על ידי

$$T_A(v) = Av$$

<u>**דוגמה:**</u> $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$, $v = (1,1,1)^t$, $\lambda = 6$:

$$Av = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5+2-1 \\ 2+2+2 \\ -1+4+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix} = 6 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda v$$

משפט 2.2 תהי $T : V \to V$ טרנספורמציה לינארית ויהי $B \subseteq V$ בסיס של V. עבור וקטור $v \in V$ נסמן $[v]_B \in F^n$ את וקטור הקואורדינטות של v ביחס לבסיס B. תהי $A = [T]_B$ המטריצה המייצגת של T ביחס לבסיס B. אזי $v \in V$ הוא וקטור עצמי של T עם ערך עצמי λ אם ורק אם $[v]_B$ הוא וקטור עצמי של A עם ערך עצמי λ.

הוכחה: ידוע כי הקשר בין T לבין A הוא למעשה

$$[T(v)]_B = A[v]_B$$

עתה, אם $T(v) = \lambda v$, אזי מתקיים

$$A[v]_B = [T(v)]_B = [\lambda v]_B = \lambda [v]_B$$

ואם מתקיים $A[v]_B = \lambda [v]_B$, אזי מתקיים

$$[T(v)]_B = A[v]_B = \lambda [v]_B = [\lambda v]_B \Rightarrow T(v) = \lambda v$$

ובכך הוכחנו את המשפט. ■