אלגברה לינארית 2א

ⓒ ארזים

17 במאי 2016

נשים לב שבהינתן מרחב מכפלה פנימית V מעל $\mathbb{F}\in\{\mathbb{R},\mathbb{C}\}$, כל $u\in V$ מגדיר פונקציונאל לינארי $f_u\in V^*$ באופן הבא:

$$f_u(v)=\langle v,u\rangle$$

תזכורת בהינתן מרחב ווקטורי V מעל שדה $\mathbb{F}$ כלשהו, המרחב הדואלי V^* מוגדר להיות

$$\{f:V\to\mathbb{F}\mid(\forall v_1,v_2\in V.f(v_1+v_2)=f(v_1)+f(v_2))\wedge(\forall v\in V,t\in\mathbb{F}.f(t\cdot v)=t\cdot f(v))\}$$

משפט 0.1 (משפט ההצגה של ריס) כל פונקצונאל לינארי $f\in V^*$ הנו מהצורה שלמעלה, כלומר לכל $f\in V^*$ קיים $u\in V$ יחיד כך שמתקיים $f=f_u$, כלומר $f(v)=\langle v,u\rangle$ לכל $v\in V$.

הוכחה: נתון $f\in V^*$. נגדיר $W=\ker f$.

אפשרות ראשונה: $f\equiv 0\iff W=V$. במקרה זה לוקחים $u=0$ וברור כי זהו הווקטור היחיד שמקיים $\langle v,u\rangle=0$ לכל v ־ הוא הווקטור היחיד שניצב לכל המרחב.

אפשרות שנייה: נסמן $\dim V=n$, ואז $\dim W=n-1$(משום שמימד התמונה הוא 1 ־ משפט המימדים לטרנספורמציות לינאריות). לכן, אם קיים u כנדרש, הוא חייב להיות ניצב לכל איברי W. מצד שני, כל u שנבחר מתוך $W^\perp$ יקיים את הנדרש, $f=f_u$, לכל $w\in W$: $f(w)=0$, וכן $f_u(w)=\langle w,u\rangle=0$.

ניזכר שממשפט שהוכחנו, $V=W\oplus W^\perp$, ולכן בפרט $\dim W^\perp=\dim V-\dim W=1$. לכן, זה מגדיר מרחב חד־מימדי של ווקטורים שבו נחפש את הווקטור u שעבורו $f=f_u$. כדי למצוא במדוייק u כזה, ניקח $0\neq u_0\in W^\perp$ כלשהו, ונגדיר

$$u=\left(\frac{\overline{f(u_0)}}{||u_0||^2}\right)\cdot u_0$$

כעת נוכיח כי $f=f_u$, כלומר לכל $v\in V$ מתקיים $f(v)=\langle v,u\rangle$. כדי להוכיח זאת, מהפירוק $V=W\oplus W^\perp$, די להוכיח, מהלינאריות של f ושל f_u, שהן מזדהות על W ועל $W^\perp$.

אכן, מבחירת u מתוך $W^\perp$, לכל $w\in W$ מתקיים $f(w)=f_u(w)=0$. כדי להוכיח כי $f=f_u$ גם על $W^\perp$, מספיק לבדוק זאת על הווקטור $u_0\in W^\perp$, שפורש את $W^\perp$ (שכן

המימד של $W^{\perp}$ הוא 1) - לכל ווקטור אחר $v\in W^{\perp}$ מתקיים $v=t\cdot u_0$ עבור סקלר $t\in\mathbb{F}$ כלשהו, ואז

$$\begin{aligned} f(v) &= f(t\cdot u_0)=t\cdot f(u_0) \\ f_u(v) &= f_u(t\cdot u_0)=t\cdot f_u(u_0) \end{aligned}$$

ולכן, אם $f(u_0)=f_u(u_0)$, נובע שמתקיים $f(v)=f_u(v)$.
אם כך, נחשב

$$f_u(u_0)=\langle u_0,u\rangle=\left\langle u_0,\overline{\frac{f(u_0)}{||u_0||^2}}\cdot u_0\right\rangle=\frac{f(u_0)}{||u_0||^2}\cdot\langle u_0,u_0\rangle=\frac{f(u_0)}{||u_0||^2}\cdot||u_0||^2=f(u_0)$$

לפיכך, קיבלנו כי $f_u=f$ גם על W וגם על $W^{\perp}$, ולכן, כפי שהסברנו קודם, מתקיים $f_u=f$ על כל V. זה מוכיח את טענת הקיום במשפט. עבור היחידות: נניח כי

$$f=f_{u_1}=f_{u_2}$$

כלומר לכל $v\in V$ מתקיים

$$f(v)=\langle v,u_1\rangle=\langle v,u_2\rangle\Rightarrow\langle v,u_1-u_2\rangle=0$$

בפרט, מתקיים

$$\begin{aligned} \langle u_1-u_2,u_1-u_2\rangle &= ||u_1-u_2||^2=0 \\ ||u_1-u_2|| &= 0 \end{aligned}$$

ולכן מהחיוביות נובע כי

$$\begin{aligned} u_1-u_2 &= 0 \\ u_1 &= u_2 \end{aligned}$$

והוכחנו את היחידות. ■

1 טרנספורמציות לינאריות במרחבי מכפלה פנימית

משפט 1.1 תהי $T:V\to V$ טרנספורמציה לינארית כאשר V מרחב מכפלה פנימית סוף מימדי מעל $\mathbb{F}\in\{\mathbb{R}\backslash\mathbb{C}\}$. אזי קיימת טרנספורמציה לינארית יחידה T^*, שנקראת הטרנספורמציה הצמודה של T, כך שלכל $u,v\in V$ מתקיים

$$\langle Tv,u\rangle=\langle v,T^*u\rangle$$

הוכחה: יהי V מרחב מכפלה פנימית, ותהי $T: V \to V$ טרנספורמציה לינארית עליו. נקבע את T ונקבע את הווקטור u, ונביט בפונקציונאל הלינארי

$$f(v) = \langle Tv, u \rangle$$

מייד לבדוק מההגדרות שזהו אכן פוקנציונאל לינארי. ממשפט ההצגה של ריס קיים ווקטור u^* יחיד כך שמתקיים $f(v) = \langle v, u^* \rangle$. באופן זה התאמנו, בהינתן T קבועה, לכל ווקטור $u \in V$ ווקטור חדש $u^* \in V$ כך שמתקיים

$$\langle Tv, u \rangle = \langle v, u^* \rangle$$

אם נוכיח כי $u \to u^*$ היא טרנספורמציה לינארית, אזי נמצא את T^* שאנחנו מחפשים. נבדוק לינאריות. נרצה שיתקיים

$$u_1 + u_2 \to u_1^* + u_2^*$$

וזה שקול לכך שמתקיים

$$\langle Tv, u_1 \rangle = \langle v, u_2^* \rangle, \langle Tv, u_2 \rangle = \langle v, u_2^* \rangle \Rightarrow \langle Tv, u_1 + u_2 \rangle = \langle v, u_1^* + u_2^* \rangle$$

משום שממשפט ההצגה של ריס ידוע לנו כי הווקטור u^* הוא יחיד לכל ווקטור u, ולכן ינבע $(u_1 + u_2)^* = u_1^* + u_2^*$. ואכן

$$\langle Tv, u_1 + u_2 \rangle = \langle Tv, u_1 \rangle + \langle Tv, u_2 \rangle = \langle v, u_1^* \rangle + \langle v, u_2^* \rangle = \langle v, u_1^* + u_2^* \rangle$$

כעת נרצה שיתקיים בנוסף

$$\langle Tv, tu \rangle = \langle v, tu^* \rangle$$

ואכן

$$\langle Tv, tu \rangle = \bar{t} \langle Tv, u \rangle = \bar{t} \langle v, u^* \rangle = \langle v, tu^* \rangle$$

ולכן ההעתקה $u \to u^*$, שנסמנה T^*, היא לינארית ומקיימת את התנאים במשפט. ∎

דוגמה $T(v) = \lambda v$, $\lambda \in \mathbb{F}$. כעת

$$\langle Tv, u \rangle = \langle \lambda v, u \rangle = \lambda \langle v, u \rangle = \langle v, \overline{\lambda} u \rangle$$

ולכן במקרה זה, $T^* u = \overline{\lambda} u$ היא הטרנפורמציה הצמודה של T.

דוגמה במצב לא סוף־מימדי: יהי V מרחב כל הפונקציות הממשיות $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, שהן גזירות אינסוף פעמים ובעלות מחזור 1, כלומר $f(x)=f(x+1)$ לכל $x\in\mathbb{R}$. נהפוך את V למרחב מכפלה פנימית מעל $\mathbb{R}$ על ידי

$$\langle f,g\rangle=\int\limits_0^1 f(x)\cdot g(x)\ \mathrm{d}x$$

תהי $T(f)=f'$. נוכיח שבמקרה זה, $T^*(f)=-f'$. יש לבדוק שלכל $f,g\in V$ מתקיים

$$\langle T(f),g\rangle=\langle f',g\rangle=\int\limits_0^1 f'\cdot g=\int\limits_0^1 f\cdot(-g')=\langle f,-g'\rangle=\langle f,T^*(g)\rangle$$

לכן יש למעשה להוכיח

$$0=\int\limits_0^1 f'\cdot g+g'\cdot f=\int\limits_0^1 (f\cdot g)'=f(1)\,g(1)-f(0)\,g(0)$$

וכמובן, $f(1)=f(0),g(1)=g(0)$.

דוגמה יהי $V=\mathbb{F}^n$ עם המכפלה הפנימית הסטנדרטית. תהי $A\in M_n(\mathbb{F})$, ונביט בטרנספורמציה $T_A(v)=Av$. נחשב את $(T_A)^*$, כלומר את הטרנספורמציה הלינארית S המקיימת $\langle T_Av,u\rangle=\langle v,Su\rangle$.
לשם כך נשים לב שאת המכפלה הפנימית הסטנדרטית ניתן להציג על ידי כפל מטריציוני של הווקטורים באופן הבא:

$$\langle v,u\rangle=v^T\overline{u}$$

ואכן, אם $u=\begin{pmatrix}b_1\\ \vdots\\ b_n\end{pmatrix},v=\begin{pmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix}$, וכעת

$$v^T\overline{u}=(a_1,\ldots,a_n)\begin{pmatrix}\overline{b_1}\\ \vdots\\ \overline{b_n}\end{pmatrix}=\sum_{i=1}^n a_i\overline{b_i}=\langle v,u\rangle$$

כעת, נוכל לחשב:

$$\langle T_Av\rangle=\langle Av,u\rangle=(Av)^T\,\overline{u}=\left(v^TA^T\right)\overline{u}=v^T\left(A^T\overline{u}\right)=v^T\overline{\left(\overline{A^T}u\right)}=\left\langle v,\overline{A^T}u\right\rangle$$

נסמן $A^*=\overline{A^t}$, ואז מתקיים $\langle T_Av,u\rangle=\langle v,T_{A^*}u\rangle$, כלומר $(T_A)^*=T_{A^*}$.
למשל, עבור $A=\begin{pmatrix}i&1\\2i+1&3\end{pmatrix}$, מתקיים $A^*=\begin{pmatrix}-i&-2i+1\\1&3\end{pmatrix}$.

משפט 1.2 תכונות בסיסיות של T^*:

1. $\left(T^*\right)^* = T$
2. $\left(\lambda T\right)^* = \overline{\lambda} T^*$
3. $\left(T+S\right)^* = T^* + S^*$
4. $\left(TS\right)^* = S^* T^*$

הוכחה: נוכיח את סעיף 1, ושאר ההוכחות יוותרו לתרגיל.
סעיף 1:

$$\begin{aligned}
\langle Tv,u\rangle &= \langle v,T^*u\rangle \\
\overline{\langle Tv,u\rangle} &= \overline{\langle v,T^*u\rangle} \\
\langle u,Tv\rangle &= \langle T^*u,v\rangle
\end{aligned}$$

ולכן $\left(T^*\right)^* = T$. ■

נשים לב שבדוגמא של מרחב הפונקציות הרציפות המחזוריות מתקיים, עבור $S\left(f\right) = f''$, $S^* = S$. מדוע?
ראינו כבר כי עבור $T\left(f\right) = f'$, מתקיים $T^* = -f'$. לכן מתקיים $S^* = \left(T^2\right)^* = \left(T\circ T\right)^* = T^*\circ T^* = \left(-T\right)\circ\left(-T\right) = T^2 = S$.
זוהי דוגמה חשובה לטרנספורמציה לינארית צמודה לעצמה.