אלגברה לינארית 2א

© ארזים

10 במאי 2016

דיברנו בשיעור שעבר על קבוצות אורתוגונליות ואורתונורמליות, והוכחנו משפט לגבי קבוצה אורתונורמלית. ראינו גם את בעיית הקירוב של ווקטור על ידי ווקטור מתת מרחב כלשהו.

מסקנה 0.1 כל קבוצה אורתונורמלית של ווקטורים היא בלתי תלוייה לינארית.

הוכחה: נוכל להחיל את סעיף 1 מהמשפט מהשיעור הקודם על הצירוף הלינארי שלהם שמתאפס, ולקבל שכל המקדמים הם אפס. ■

מכאן נובע גם שכל קבוצה אורתוגונלית היא בלתי תלוייה לינארית, כל עוד היא לא מכילה את אפס - נוכל לנרמל כל ווקטור ($u \to \frac{u}{||u||}$) ולקבל קבוצה אורתוגונלית, שהיא בלתי תלוייה - לכן הקבוצה המקורית בלתי תלוייה.

נשים לב שאם $\{e_i\}$ היא בסיס אורתוגונלי אזי החישוב של מכפלה פנימית של ווקטורים כאשר הם נתונים כצירוף לינארי של איברי הבסיס הוא קל מאוד, ונראה כמו המכפלה הפנימית הסטנדרטית. אם $u = \sum a_i e_i$, $v = \sum b_j e_j$, אזי

$$\langle v, u \rangle = \left\langle \sum a_i e_i, \sum b_j e_j \right\rangle = \sum a_i \overline{b_j}$$

גרם-שמידט תהליך לבניית בסיס אורתונורמלי למרחב מכפלה פנימית מתוך בסיס אחר כלשהו נתון שלו.

משפט 0.2 יהי V מרחב מכפלה פנימית, ויהי $\{v_i\} \subseteq V$ בסיס שלו. אזי קיים בסיס אורתונורמלי $\{e_i\}$ של V כך שלכל $1 \le k \le \dim V$ מתקיים $\mathrm{span}\,\{e_i\}_{i=1}^k = \mathrm{span}\,\{v_i\}_{i=1}^k$.

הוכחה: נסמן $\dim V = n$. נבנה באופן אינדוקטיבי על k לכל $1 \le k \le n$ קבוצה אורתונורמלית $\{e_i\}_{i=1}^k$ (בכל שלב מוסיפים ווקטור חדש לקבוצה הקיימת) כך שמתקיים $\mathrm{span}\,\{e_i\}_{i=1}^k = \mathrm{span}\,\{v_i\}_{i=1}^k$. כאשר נגיע לשלב $k = n$, תהיה לנו קבוצה אורתונורמלית פורשת, ולכן היא בסיס.

כיצד מתבצע התהליך? עבור $k = 1$, $v_1 \ne 0$ (איבר בבסיס) ולכן ניקח $e_1 = \frac{v_1}{||v_1||}$.

כעת, נניח שכבר בנינו קבוצה $\{e_i\}_{i=1}^k$ בגודל k המקיימת את הנדרש. כעת נבנה את e_{k+1}. נביט בתת-מרחב $\mathrm{span}\,\{v_i\}_{i=1}^k = \mathrm{span}\,\{e_i\}_{i=1}^k$. נרצה לקרב בתוכו את הווקטור v_k, כמו שדיברנו בשיעור שעבר. לכן, ניעזר במשפט שהוכחנו בשבוע שעבר: נגדיר

$$w_{k+1} = v_{k+1} - \sum_{i=1}^{k} \langle v_{k+1}, e_i \rangle \cdot e_i$$

חלק 2 מהמשפט בשבוע שעבר מבטיח לנו כעת כי w_{k+1} ניצב לכל e_i. כמו כן, הוא אינו וקטור האפס ־ אם הוא היה, היינו מקבלים כי $v_{k+1} \in \text{span}\{e_i\}_{i=1}^k = \text{span}\{v_i\}_{i=1}^k$, בסתירה לכך שהתחלנו עם בסיס. ננרמל וקטור זה, וניקח $e_{k+1} = \frac{w_{k+1}}{||w_{k+1}||}$. כעת, $\{e_i\}_{i=1}^{k+1}$ היא קבוצה אורתונורמלית. נראה שהיא מקיימת את הנדרש, כלומר יש להוכיח כי תת המרחב שנפרש על ידי כל רישא של e_i שווה לתת המרחב שנפרש על ידי אותה רישא של v_i. עד לשלב $i = k$ זה מובטח לנו מהנחת האינדוקציה. עבור $i = k+1$: אם נסמן כמו קודם $U = \text{span}\{v_i\}_{i=1}^k = \text{span}\{e_i\}_{i=1}^k$ אזי מההגדרה של w_{k+1} ברור שמתקיים $w_{k+1} - v_{k+1} \in U$, ובמצב כזה ברור שמתקיים $\text{span}\{U \cup \{v_{k+1}\}\} = \text{span}\{U \cup \{w_{k+1}\}\}$ (מכל אחד מהם ניתן לקבל את השני על ידי חיבור של וקטור מתוך u). לכן,

$$\text{span}\{v_i\}_{i=1}^{k+1} = \text{span}\{e_1, \ldots, e_k, w_{k+1}\} = \text{span}\{e_i\}_{i=1}^{k+1}$$

כאשר השוויון האחרון הוא משום שהווקטור e_{k+1} הוא רק כפל בסקלר של w_{k+1}. לכן קיבלנו את הנדרש. ■

מסקנה 0.3 לכל מרחב מכפלה פנימית סוף מימדי ישנו בסיס אורתונורמלי.

מסקנה 0.4 אם $U \subseteq V$ תת מרחב, אזי כל בסיס אורתונורמלי של U ניתן להשלים לבסיס אורתונורמלי של V.

הוכחה: נתחיל עם בסיס אורתונורמלי של U ־ מובטח מהמסקנה הקודמת. נשלים אותו לבסיס כלשהו של המרחב V ונבצע את תהליך גרם־שמידט על הבסיס הזה. בדיקה ישירה וקלה מראה שתהליך גרם־שמידט על קבוצה שהווקטורי סהראשונים בה כבר אורתונורמליים לא ישנה אותם, ולכן נקבל ממנו בסיס אורתונורמלי שהתחלתו היא הבסיס של U. ■

דוגמה נבצע את תהליך גרם־שמידט במרחב $\mathbb{R}^3$ (מכפלה פנימית סטנדרטית) על הבסיס $v_1 = (0,3,4), v_2 = (1,2,1), v_3 = (0,0,2)$.
בשלב ראשון, ננרמל את v_1:

$$\begin{aligned} ||v_1||^2 &= 0^2 + 3^2 + 4^2 = 25 \\ ||v_1|| &= 5 \end{aligned}$$

לכן נגדיר

$$e_1 = \frac{1}{5} v_1 = \frac{1}{5}(0,3,4)$$

בשלב השני, ניקח בנוסחה מקודם את $k = 1$ ונקבל

$$\begin{aligned} w_2 &= v_2 - \langle v_2, e_1 \rangle \cdot e_1 = (1,2,1) - \frac{1}{5}\langle (1,2,1), (0,3,4) \rangle \cdot \frac{1}{5}(0,3,4) = \\ &= (1,2,1) - \frac{1}{5} \cdot 10 \cdot \frac{1}{5} \cdot (0,3,4) = (1,2,1) - \frac{2}{5}(0,3,4) = \frac{1}{5}((5,10,5) - (0,6,8)) = \\ &= \frac{1}{5}(5,4,-3) \end{aligned}$$

כעת יש לנרמל:

$$\begin{aligned}
||w_2||^2 &= \frac{1}{25}\cdot\left(5^2+4^2+3^2\right)=\frac{1}{25}\cdot 50=2\\
||w_2|| &= \sqrt{2}\\
e_2 &= \frac{1}{5\sqrt{2}}\left(5,4,-3\right)
\end{aligned}$$

ממשיכים: לוקחים $k=2$ בנוסחה ומקבלים

$$\begin{aligned}
w_3 &= v_3-\langle v_3,e_1\rangle\cdot e_1-\langle v_3,e_2\rangle\cdot e_2=(0,0,2)-\frac{1}{5}\left\langle (0,0,2),(0,3,4)\right\rangle\cdot\frac{1}{5}\cdot(0,3,4)\\
&- \frac{1}{5\sqrt{2}}\left\langle (0,0,2),(5,4,-3)\right\rangle\cdot\frac{1}{5\sqrt{2}}\cdot(5,4,-3)=(0,0,2)-\frac{8}{5}\cdot\frac{1}{5}\cdot(0,3,4)+\frac{6}{5\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{5\sqrt{2}}(5,4,-3)=\\
&= (0,0,2)-\frac{8}{25}(0,3,4)+\frac{3}{25}(5,4,-3)=\frac{1}{25}\left((0,0,50)-(0,24,32)+(15,12,-9)\right)=\frac{1}{25}(15,-12,9)
\end{aligned}$$

וכעת ננרמל:

$$\begin{aligned}
||w_3||^2 &= \frac{1}{625}(225+144+81)=\frac{1}{625}\cdot 450=\frac{18}{25}\\
||w_3|| &= \frac{3\sqrt{2}}{5}\\
e_3 &= \frac{1}{15\sqrt{2}}(15,-12,9)=\frac{1}{5\sqrt{2}}(5,-4,3)
\end{aligned}$$

נוודא ניצבות של e_1,e_3. מספיק לבדוק ניצבות של w_3,e_1 ולכן

$$\langle w_3,e_1\rangle=c\left\langle (15,-12,9),(0,3,4)\right\rangle=0$$

הגדרה 0.5 יהי V מרחב מכפלה פנימית, $A\subseteq V$ קבוצה לא ריקה כלשהי. מגדירים את המשלים הניצב לקבוצה A להיות

$$A^{\perp}=\{v\in V\mid \forall u\in A\ \ \langle v,u\rangle=0\}$$

זוהי קבוצת כל הווקטורים שניצבים לכל הווקטורים בקבוצה A.

קל לוודא שמשלים ניצב של כל קבוצה הוא תת מרחב - הוא מכיל את אפס, כי אפס ניצב לכל ווקטור, וסגור לחיבור וכפל בסקלר, מההגדרות ישירות.

טענה 0.6 $A\cap A^{\perp}=\{0\}$ (אם $0\in A$ - אחרת החיתוך ריק).

הטענה טריוויאלית כי הווקטור היחיד שניצב לעצמו הוא ווקטור האפס מאקסיומת החיוביות.

משפט 0.7 יהי V מרחב מכפלה פנימית, יהי $U\subseteq V$ תת מרחב. אזי $V=U\oplus U^{\perp}$.

הוכחה: נראה כי $V=U+U^{\perp}$. יהי $v\in V$. ראינו שקיים $u\in U$ כך שהווקטור $v-u$ ניצב לכל איברי U, כלומר $v-u\in U^{\perp}$, וכעת $v=u+v-u$, $u\in U, v-u\in U^{\perp}$. ■

מסקנה 0.8 $\dim U+\dim U^{\perp}=\dim V$.

משפט 0.9 לכל תת מרחב $U\subseteq V$, $\left(U^{\perp}\right)^{\perp}=U$.

הוכחה: ברור לחלוטין שמתקיים $U\subseteq\left(U^{\perp}\right)^{\perp}$ מיידית מההגדרות. את השוויון נקבל משיקולי מימדים: נוכיח שמתקיים $\dim U=\dim\left(U^{\perp}\right)^{\perp}$ - זה נובע ישירות מהמסקנה הקודמת:

$$\begin{aligned}\dim U+\dim U^{\perp} &= \dim V=\dim U^{\perp}+\dim\left(U^{\perp}\right)^{\perp}\\ \dim U &= \dim\left(U^{\perp}\right)^{\perp}\end{aligned}$$

ולכן קיבלנו את הנדרש. ■

דוגמא

$$\begin{aligned}V &= \mathbb{R}^{3}\\ U &= \{(0,0,z)\mid z\in\mathbb{R}\}\\ U^{\perp} &= \{(x,y,0)\mid x,y\in\mathbb{R}\}\end{aligned}$$

כדי למצוא את המשלים הניצב של U נית ולהשתמש בגרם־שמידט: מוצאים בסיס אורתונורמלי של U, משלימים אותו לבסיס אורתונורמלי של כל V, והחלק שהוספנו הוא בסיס אורתונורמלי של $U^{\perp}$. זאת משום שהווקטורים הללו ניצבים לכל U, ויש מספר שלהם שזהה למימד של $U^{\perp}$.

הערה 0.10 לגבי החישוב הנומרי שעשינו עם תהליך גרם־שמידט: יהיו $v_1,v_2,v_3\in\mathbb{R}^{3}$ כמו בדוגמא שחישבנו. נרצה את המרחק המינימלי מהווקטור v_3 לתת המרחב שנפרש על ידי $\{v_1,v_2\}$. מרחק זה ניתן על ידי $||w_3||$.