אלגברה לינארית 2א

ⓒ ארזים

17 באפריל 2016

משפט 0.1 שתי מטריצות $A,A'\in M_n(F)$ הן חופפות אם ורק אם הן מייצגות את אותה תבנית בי־לינארית ביחס לבסיסים שונים.

הוכחה: מצד אחד אם הן מייצגות את אותה תבנית, אזי הן הקשר ביניהן שראינו בשבוע שעבר הוא $A'=P^tAP$, כאשר P מטריצה הפיכה (מטריצת המעבר בין הבסיסים), ולכן הן חופפות. מצד שני, אם הן חופפות ניקח תבנית בי־לינארית $f\in B(V,V)$ כלשהי שמיוצגת על ידי A, ניקח בסיס חדש שמטריצת המעבר אליו היא המטריצה P המקשרת בין A,A' (שכן הן חופפות), על ידי לקיחת עמודות המטריצה P^{-1}. אזי מתוך המשפט שהוכחנו, ייצוג התבנית ביחס לבסיס החדש הוא על ידי המטריצה $P^tAP=A'$. ∎

יחס החפיפה בין מטריצות הוא יחס שקילות:

1. $A\sim A$
2. $A\sim B\Rightarrow B\sim A$
3. $A\sim B\wedge B\sim C\Rightarrow A\sim C$

דוגמה לייצוג תבנית על ידי מטריצה: ניקח $V=F^2$, ואת התבנית

$$f\left(\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix},\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}\right)=xv+uy$$

כעת, ביחס לבסיס הסטנדרטי,

$$M(f)=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$$

עבור התבנית

$$f\left(\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix},\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}\right)=xv-uy$$

המטריצה המייצגת היא

$$M(f)=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}$$

המשפט על שינוי המטריצה המייצגת במעבר בסיסים מאפשר להגדיר את הדרגה של תבנית בי־לינארית:

הגדרה 0.2 עבור $f \in B(V,W)$, מגדירים את הדרגה של f (מסומן $\mathrm{rank} f$) להיות הדרגה של מטריצה המייצגת אותה.

המושג מוגדר היטב כי בבסיס אחר, המטריצה המייצגת תהי $A' = P^t A Q$, והמטריצות P, Q הפיכות, לכן $\mathrm{rank} A = \mathrm{rank} A'$.

דוגמה בתבניות שראינו קודם בדוגמה, הדרגה של שתי התבניות היא 2.

טענה 0.3 אם A, A' חופפות אזי:

1. $\mathrm{rank} A = \mathrm{rank} A'$
2. קיים $0 \neq c \in F$ כך שמתקיים $\det A' = c^2 \det A$

הוכחה: לפי סעיפים:

1. ברור (הסברנו לפני רגע).
2. $A' = P^t A P$, ולכן

$$\det A' = \det P^t \cdot \det A \cdot \det P = (\det P)^2 \cdot \det A$$

ומשום שהמטריצה P הפיכה מתקיים $c = \det P \neq 0$.

■

לדוגמה, אם $F = \mathbb{R}$, $\det A > 0$, וכן $\det A' < 0$, אזי הן בהכרח לא חופפות - כי לא יכול להיות קיים סקלר כפי שראינו בטענה.

מעתה נתמקד במקרה בו $V = W$.

הגדרה 0.4 תבנית $f \in B(V,V)$ נקראת סימטרית אם $f(v_1, v_2) = f(v_2, v_1)$ לכל $v_1, v_2 \in V$.

הגדרה 0.5 תבנית $f \in B(V,V)$ נקראת אנטי־סימטרית אם $f(v_1, v_2) = -f(v_2, v_1)$ לכל $v_1, v_2 \in V$.

משפט 0.6 f סימטרית אם ורק אם $A = M(f)$ היא מטריצה סימטרית ביחס לאיזשהו בסיס של V. כנ"ל לגבי אנטי־סימטריה של f ושל המטריצה המייצגת.

הוכחה: אם f סימטרית אזי

$$a_{ij} = f(v_i, v_j) = f(v_j, v_i) = a_{ji}$$

וקיבלנו את הסימטריה של המטריצה המייצגת. הוכחה זהה, עם מינוס, מוכיחה עבור אנטי־סימטריה.

בכיוון השני, נניח עכשיו שמטריצה מייצגת כלשהי A היא סימטרית. נזכור שהוכחנו כי מתקיים, אם A מייצגת ביחס לבסיס B,

$$\begin{aligned} f(v_1, v_2) &= [v_1]_B^t A [v_2]_B \\ f(v_2, v_1) &= [v_2]_B^t A [v_1]_B \end{aligned}$$

כעת, משום ששחלוף של סקלר משיאר אותו כמו שהוא (מטריצה 1×1)

$$f\left(v_2,v_1\right)=\left(\left[v_2\right]_B^t A\left[v_1\right]_B\right)^t=\left[v_1\right]_B^t A^t\left[v_2\right]_B$$

לכן, כאשר A סימטרית ($A=A^t$) נקבל שוויון וסימטריה של התבנית, וכאשר A אנטי־סימטרית ($A=-A^t$) נקבל שוויון עם היפוך סימן ואנטי־סימטריה של התבנית. ■

הגדרה 0.7 תהי f תבנית סימטרית על $V\times V$. מגדירים את <u>התבנית הריבועית</u> שמתאימה לתבנית f, שמסומנת Q_f, להיות

$$Q_f\left(v\right)=f\left(v,v\right)$$

דוגמה עבור התבנית הראשונה מהדוגמה של קודם, נקבל

$$Q_f\left(\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right)=f\left(\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix},\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right)=2xy$$

עבור התבנית

$$f\left(\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix},\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}\right)=ux+vy$$

נקבל

$$Q_f\left(\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right)=x^2+y^2$$

משפט 0.8 תהי f תבנית בי־לינארית סימטרית. אזי:

1. $2f\left(v,w\right)=Q_f\left(v+w\right)-Q_f\left(v\right)-Q_f\left(w\right)$
2. אם $\mathrm{char}F\neq2$ (כלומר בשדה שלנו $1+1\neq0$) והתבנית f אינה תבנית האפס, אזי קיים $v\in V$ כך שמתקיים $Q_f\left(v\right)\neq0$.

הוכחה: נחשב את אגף ימין של הסעיף הראשון:

$$\begin{aligned}Q_f\left(v+w\right)-Q_f\left(v\right)-Q_f\left(w\right)&=f\left(v+w,v+w\right)-f\left(v,v\right)-f\left(w,w\right)=\\&=f\left(v,v\right)+f\left(v,w\right)+f\left(w,v\right)+f\left(w,w\right)-f\left(v,v\right)-f\left(w,w\right)=\\&=2f\left(v,w\right)\end{aligned}$$

כעת נוכיח את 2: אם המציין אינו 2, אזי $2 \neq 0$, וניתן לחלק את השוויון מסעיף 1 בשתיים, ולקבל

$$f\left(v,w\right)=\frac{1}{2}\left(Q_{f}\left(v+w\right)-Q_{f}\left(v\right)-Q_{f}\left(w\right)\right)$$

לכן, אם $Q_{f}\equiv0$ אזי נובע שהתבנית f הייתה חייבת להיות תבנית האפס, בסתירה לנתון שלנו. ■

דוגמה באותה תבנית מהדוגמה הראשונה, קיבלנו $Q_{f}\left(\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right)=2xy$. אם המציין של השדה הוא 2, נקבל $Q_{f}\equiv0$, אבל התבנית הבי־לינארית אינה תבנית האפס, שכן למשל $f\left(e_{1},e_{2}\right)=1\neq0$.

משפט 0.9 נניח כי $\mathrm{char}F\neq2$ ותהי f תבנית סימטרית על V. אזי קיים בסיס של V שביחס אליו המטריצה המייצגת את f היא אלכסונית ־ כלומר קיים בסיס $\left\{ v_{i}\right\} \subseteq V$ כך שמתקיים, לכל $i\neq j$,

$$f\left(v_{i},v_{j}\right)=0$$

נח לעבוד עם בסיס כזה כי אז אם ניקח

$$\begin{aligned}v & = \sum_{i=1}^{n}a_{i}v_{i}\\ w & = \sum_{j=1}^{n}b_{j}v_{j}\end{aligned}$$

ונחשב:

$$f\left(v,w\right)=f\left(\sum_{i=1}^{n}a_{i}v_{i},\sum_{j=1}^{n}b_{j}v_{j}\right)=\sum_{i=1}^{n}a_{i}b_{i}\cdot f\left(v_{i},v_{i}\right)$$

הוכחה: באינדוקציה על $\dim V$.

אם $\dim V=1$, אין מה להוכיח. כעת נניח כי המשפט נכון עד מימד n, ונוכיח עבור $\dim V=n+1$. אם f תבנית האפס אז כמובן שאין מה להוכיח (כי היא מיוצגת על ידי מטריצת האפס). אחרת, קיים מהמשפט הקודם וקטור $v_{0}\in V$ כך שמתקיים

$$Q_{f}\left(v_{0}\right)=f\left(v_{0},v_{0}\right)\neq0$$

כעת נגדיר

$$U:=\left\{ u\in V\mid f\left(v_{0},u\right)=0\right\}$$

נראה שמתקיים $\dim U = \dim V - 1$. אכן, U הוא הגרעין של הפוקנציונאל הלינארי $u \to f(v_0, u)$, וזהו פונקציונאל שאינו אפס, כיוון שהוא לא מתאפס עבור $u = v_0$. לכן, ממשפט המימדים נובע כי גרעין הפונקציונאל (שהוא בדיוק U) הוא ממימד $\dim V - 1$.

כמו כן, ברור שמתקיים $U \cap \operatorname{span}\{v_0\} = \{0\}$, מכך שמתקיים $f(v_0, v_0) \neq 0$. כעת, נצמצם את התבנית f לתת־המרחב U, ומהנחת האינדוקציה קיים בסיס של U שביחס אליו המטריצה המייצגת את f אלכסונית. כשנוסיף לבסיס זה את הוווקטור v_0 נקבל את הבסיס הרצוי - $f(v_0, u_i) = 0$ לכל i משום שהם ווקטורים במרחב U. ■

מעל השדות $F = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ ניתן "לשדרג" את המשפט:

משפט 0.10 לכל תבנית סימטרית מעל $\mathbb{C}$ קיימת מטריצה מייצגת A שהיא מהצורה

$$A = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

הוכחה: מהמשפט הקודם ניתן למצוא בסיס $\{v_i\}$ שביחס אליו המטריצה המייצגת היא

$$\begin{pmatrix} c_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & c_k & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

כאשר $c_i \neq 0$ לכל i. כעת ניקח בסיס חדש, בו נחליף את v_i, עבור $1 \leq i \leq k$, בווקטור $\widetilde{v}_i = \frac{v_i}{\sqrt{c_i}}$ (בשדה שלנו לכל סקלר יש שורש).
כעת,

$$f(\widetilde{v}_i, \widetilde{v}_i) = f\left(\frac{v_i}{\sqrt{c_i}}, \frac{v_i}{\sqrt{c_i}}\right) = \frac{f(v_i, v_i)}{c_i} = 1$$

וכמובן כאשר $i \neq j$

$$f(\widetilde{v}_i, \widetilde{v}_j) = c \cdot f(v_i, v_j) = 0$$

■

משפט 0.11 מעל $\mathbb{C}$, לכל f סימטרית יש מטריצה מייצגת יחידה מהצורה שבמשפט הקודם.

הוכחה: קיום הוכחנו. היחידות נובעת מהסתכלות על דרגת המטריצה המייצגת, שהיא דרגת התבנית. כלומר כמות האחדות במטריצה המייצגת הזו נקבעת ביחידות לפי f. ■

מה קורה מעל $\mathbb{R}$? כאן נבצע בדיוק את אותו תהליך נירמול כמו קודם, רק שנחלק למקרים: עבור אותם v_i כך שמתקיים $f(v_i, v_i) > 0$, נוכל לנרמל כמו קודם ולקבל $f(\widetilde{v}_i, \widetilde{v}_i) = 1$; עבור אותם v_i כך שמתקיים $f(v_i, v_i) < 0$, נחלק בסקלר $\sqrt{-f(v_i, v_i)}$, כך שנקבל $f(\widetilde{v}_i, \widetilde{v}_i) = -1$.

משפט 0.12 כל תבנית סימטרית מעל $\mathbb{R}$ ניתנת לייצוג על ידי מטריצה אלכסונית מהצורה

$$A = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & \\ & & & -1 & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & -1 & & & \\ & & & & & & 0 & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

כאן מתקבל שהגודל של בלוק האחדים, שנסמנו p, ועוד הגודל של בלוק המינוס אחדים, שנסמנו q, הוא המימד של f, כלומר $\text{rank} f = p + q$.

שאלה האם p, q עצמם נקבעים ביחידות על ידי f?

משפט 0.13 (משפט ההתמדה של סילבסטר) הערכים p, q (שנקראים גם הסיגנטורה של f) נקבעים על ידי f, כלומר אם קיימת עוד מטריצה אלכסונית שמייצגת את f שבה יש r אחדים וכן s מינוס אחדים על האלכסון, אזי $p = r, q = s$.

הוכחה: נניח כי A מייצגת את f עם סיגנטורה (p, q), וכן כי C מייצגת את אותה f עם סיגנטורה (r, s). בלי הגבלת הכלליות, $r \leq p$. יהיו $\{v_1, \ldots, v_p\} \subseteq V$ איברי הבסיס שעליהם $f(v_i, v_i) = 1$ לפי המטריצה A. יהי $0 \neq u \in U = \text{span}\{v_1, \ldots, v_p\}$. כעת

$$f(u, u) = f\left(\sum_{i=1}^{p} a_i v_i, \sum_{i=1}^{p} a_i v_i\right) = \sum_{i=1}^{p} a_i^2 f(v_i, v_i) = \sum_{i=1}^{p} a_i^2 > 0$$

כעת נביט במרחב $W \subseteq V$ שנפרש על ידי כל הווקטורים w_i בבסיס שבו f מיוצגת על ידי המטריצה C שעבורם $f(w_i, w_i) = -1, 0$. עבור כל $w \in W$ נראה כי

$$f(w, w) = f\left(\sum a_i w_i, \sum a_i w_i\right) = \sum a_i^2 f(w_i, w_i) \leq 0$$

לסיום, נשים לב שאם מתקיים $r < p$, אזי $s > q$, ולכן

$$\dim W + \dim U = n - r + p > \dim V$$

לכן, $U \cap W \neq \{0\}$, וזו סתירה, כי אם $0 \neq v \in U \cap W$, אזי

$$\begin{aligned} v \in U \quad &\Rightarrow \quad f(v,v) > 0 \\ v \in W \quad &\Rightarrow \quad f(v,v) \leq 0 \end{aligned}$$

לכן $p = r, q = s$. ■