אלגברה לינארית 2א

ⓒ ארזים

14 באפריל 2016

1 תבניות בי־לינאריות

הגדרה 1.1 יהיו V,W מרחבים וקטוריים מעל שדה F. תבנית בי־לינארית על $V\times W$ היא העתקה $B:V\times W\to F$ שהיא לינארית בכל אחד מהרכיבים לחוד. כלומר, לכל $v_0\in V$, $w\to B\left(v_0,w\right)$ הוא פונקציונאל לינארי על W, ולכל $w_0\in W$, $v\to B\left(v,w_0\right)$ הוא פונקציונאל לינארי על V.

דוגמאות

1. $B\left(v,w\right)\equiv 0$ - תבנית האפס, כמובן בי־לינארית.
2. $V=W=\mathbb{R}^2$, וניקח $B\left(\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix},\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}\right)=2xu+5xv-12yu$. הבדיקה ישירה, ועוזר כאן לדעת מה שנראה מיד - באופן כללי, סכום של תבניות בי־לינאריות הוא גם כזה, ולכן מספיק לבדוק לכל מחובר לחוד. למשל, עבור $B_1\left(\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix},\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}\right)=2xu$:

$$\begin{aligned}B_1\left(\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}\right) &= 2\left(x_1+x_2\right)u=2x_1u+2x_2u=\\ &= B_1\left(\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}\right)+B_1\left(\begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}\right)\end{aligned}$$

זה מוכיח אדיטיביות (שמירה על סכום) ברכיב הראשון.
עבור הומוגניות (שמירה על כפל בסקלר) ברכיב הראשון:

$$B_1\left(t\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix},\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}\right)=2\left(xt\right)u=t\cdot 2xu=t\cdot B_1\left(\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix},\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}\right)$$

באופן דומה בודקים לינאריות ברכיב השני, וכן את לינאריות המרכיבים האחרים (כל זה ינבע בקרוב מתוצאות כלליות הרבה יותר).
הזכרנו את הטענה הקלה הבאה:

טענה 1.2 קבוצת התבניות הבי־לינאריות על $V\times W$ מהווה מרחב וקטורי מעל F, כאשר

$$\begin{aligned}\left(tB\right)\left(v,w\right) &= t\left(B\left(v,w\right)\right)\\ \left(B_1+B_2\right)\left(v,w\right) &= B_1\left(v,w\right)+B_2\left(v,w\right)\end{aligned}$$

זה נובע מתכונות בסיסיות של פונקציונאלים בי־לינאריים.

3. נניח כי $V=W=M_n(F)$ מרחבים ווקטוריים מעל F ביחס לסכום רגיל וכפל בסקלר של מטריצות. אזי

$$\begin{aligned} B(P,Q) &:= \operatorname{tr}(PQ) \\ B(P,Q) &:= \operatorname{tr}\left(PQ^t\right) \end{aligned}$$

הן תבניות בי־לינארית.

הוכחה: עבור P_0 קבוע, $Q\to\operatorname{tr}(P_0Q)$ הוא אדיטיבי על Q בגלל חוק הפילוג לכפל מטריצות, ואדיטיביות העקבה:

$$B(P_0,Q_1+Q_2)=\operatorname{tr}(P_0(Q_1+Q_2))=\operatorname{tr}(P_0Q_1)+\operatorname{tr}(P_0Q_2)=B(P_0,Q_1)+B(P_0,Q_2)$$

וכן כמובן

$$B(P_0,tQ)=\operatorname{tr}(P_0tQ)=\operatorname{tr}(tP_0Q)=t\cdot\operatorname{tr}(P_0Q)=t\cdot B(P_0,Q)$$

בדומה בודקים לינאריות ברכיב השני, ולפונקציונאל השני. ■

4. יהיו V,W מרחבים ווקטוריים מעל F, $\varphi\in V^*$, $\psi\in W^*$. אזי

$$B(v,w)=\varphi(v)\cdot\psi(w)$$

היא תבנית בי־לינארית. באופן כללי יותר ינבע שכל תבנית בי־לינארית היא צירוף לינארי של תבניות מסוג זה, כמו בדוגמה הראשונה.

5. חשוב: נסמן $\dim V=n,\dim W=m$, ותהי $A\in M_{n\times m}(F)$. נקבע בסיסים למרחבים - B_V,B_W בהתאמה. אזי

$$B(v,w)=[v]_{B_V}^t A[w]_{B_W}$$

היא תבנית בי־לינארית. הבדיקה היא שוב ישירה, למשל עבור לינאריות על V: לכל $w_0\in W$

$$\begin{aligned} B(v_1+v_2,w_0) &= [v_1+v_2]_{B_V}^t\cdot A\cdot[w_0]_{B_W}=\left([v_1]_{B_V}^t+[v_2]_{B_V}^t\right)\cdot A\cdot[w_0]_{B_W}= \\ &= [v_1]_{B_V}^t\cdot A\cdot[w_0]_{B_W}+[v_2]_{B_V}^t\cdot A\cdot[w_0]_{B_W}=B(v_1,w_0)+B(v_2+w_0) \end{aligned}$$

הערה 1.3 את ארבעת התכונות המגדירות תבנית בי־לינארית ניתן לסכם לכדי תכונה אחת:

$$\begin{aligned}(*)\ B\left(av_1+bv_2,cw_1+dw_2\right) &= B\left(av_1,cw_1+dw_2\right)+B\left(bv_2,cw_1+dw_2\right)= \\ &= B\left(av_1,cw_1\right)+B\left(av_1,dw_2\right)+B\left(bv_2,cw_1\right)+B\left(bv_2,dw_2\right)= \\ &= acB\left(v_1,w_1\right)+adB\left(v_1,w_2\right)+bcB\left(v_2,w_1\right)+bdB\left(v_2,w_2\right)\ (**)\end{aligned}$$

השוויון $(**)=(*)$ מסכים את ארבעת האקסיומות של בי־לינאריות.

באופן כללי, חישוב דומה מראה את השוויון הבא לתבניות בי־לינאריות כלליות:

$$B\left(\sum_i x_iv_i,\sum_j y_jw_j\right)=\sum_{i,j}x_iy_jB\left(v_i,w_j\right)$$

הגדרה 1.4 יהיו V,W מרחבים וקטוריים מעל שדה F, ויהיו $B_V=\{v_1,\dots,v_n\}\subseteq V$ בסיס למרחב V, $B_W=\{w_1,\dots,w_m\}\subseteq W$ בסיס למרחב W. לכל תבנית בי־לינארית $B\in B\left(V,W\right)$ (הסימון $B\left(V,W\right)$ משמעו קבוצת כל התבניות הבי־לינאריות על $V\times W$), נגדיר את <u>המטריצה המייצגת</u> את B, $M\left(B\right)\in M_{n\times m}\left(F\right)$, באופן הבא:

$$A=M\left(B\right),A=\left(a_{ij}\right),a_{ij}=B\left(v_i,w_j\right)$$

משפט 1.5 אם $A=M\left(B\right)$ המטריצה המייצגת את התבנית B, עם הסימונים שבהגדרה הקודמת, אזי מתקיים

$$B\left(v,w\right)=\left[v\right]_{B_V}^t\cdot A\cdot\left[w\right]_{B_W}$$

הוכחה: יהיו $v\in V,w\in W$ ונסמן

$$\begin{aligned}v &= \sum x_iv_i \\ w &= \sum y_jw_j\end{aligned}$$

מתקיים

$$A=\left(a_{ij}\right),a_{ij}\coloneqq B\left(v_i,w_j\right)$$

וכעת נחשב:

$$\begin{aligned}B\left(v,w\right) &= B\left(\sum x_iv_i,\sum y_jw_j\right)=\sum x_iy_jB\left(v_i,w_j\right)=\sum x_iy_ja_{ij} \\ \left[v\right]_{B_V}^t A\left[w\right]_{V_W} &= \begin{pmatrix}x_1 & \dots & x_n\end{pmatrix}\left(a_{ij}\right)\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_m\end{pmatrix}=\sum x_iy_ja_{ij}\end{aligned}$$

וכך מתקבל השוויון הרצוי. ■

את הקשר בין תבניות ומטריצות מייצגות נסכם במשפט הבא:

משפט 1.6 נשמור את כל הסימונים מהמשפט הקודם למרחבים, לבסיסים ולמטריצה המייצגת. אזי ההעתקה $M:B\left(V,W\right)\to M_{n\times m}\left(F\right)$ המתאימה לכל תבנית את המטריצה המייצגת אותה היא איזומורפיזם של מרחבים ווקטוריים - כלומר היא לינארית, חד־חד־ערכית ועל (הומומורפיזם שהוא מונומורפיזם ואפימורפיזם).

הוכחה: לינאריות ההתאמה M היא ברורה מהגדרת החיבור בשני המרחבים.

מדוע ההתאמה על?

בהינתן מטריצה $A\in M_{n\times m}\left(F\right)$, נרצה למצוא תבנית $B\in B\left(V,W\right)$ שהמטריצה A מייצגת אותה. ניזכר בדוגמא החשובה שראינו קודם:

$$B\left(v,w\right)=\left[v\right]_{B_V}^{t}A\left[w\right]_{B_W}$$

הוכחנו כבר שתבנית זו היא בי־לינארית. יש רק לבדוק שמהטריצה המייצגת אותה היא אכן A. ואכן

$$B\left(v_i,w_j\right)=e_i^t\cdot A\cdot e_j=a_{ij}$$

ולכן $A=M\left(B\right)$, וההתאמה היא על.

מדוע ההתאמה חד־חד־ערכית?

משום שאנחנו יודעים שהיא לינארית, מספיק להראות שהגרעין שלה טריוויאלי, כלומר יש להראות אם $M\left(B\right)=0$ אזי $B=0$. ואכן, אם $M\left(B\right)=0$ אזי לכל זוג של איברי בסיס $v_i\in B_V,w_j\in B_W$ מתקיים $B\left(v_i,w_j\right)=0$, ומלינאריות נובע שלכל $v\in V,w\in W$ מתקיים

$$B\left(v,w\right)=B\left(\sum x_iv_i,\sum y_jw_j\right)=\sum x_iy_jB\left(v_i,w_j\right)=0$$

לכן סיימנו. ■

מסקנה 1.7 המרחב $B\left(V,W\right)$ הוא ממימד סופי, ומימדו $\dim V\cdot\dim W$.

הערה 1.8 זה מסביר הערה קודמת - כל תבנית בי־לינארית היא צירוף לינארי של תבנית מהסוג $\varphi\left(v\right)\cdot\psi\left(w\right)$, כאשר $\varphi\in V^*,\psi\in W^*$.

משפט 1.9 יהיו V,W מרחבים ווקטוריים מעל F. יהיו $B,B'\subseteq V$ בסיסים של V, ויהיו $C,C'\subseteq W$ בסיסים של W. תהי $f\in B\left(V,W\right)$ תבנית בי־לינארית. תהי P מטריצת המעבר מהבסיס B לבסיס B', ותהי Q מטריצת המעבר מהבסיס C לבסיס C'. תהי A המטריצה המייצגת את f ביחס לבסיסים B,C, ותהי A' המטריצה שמייצגת את f ביחס לבסיסים B',C'. אזי מתקיים

$$A'=P^tAQ$$

הוכחה: מההנחות על P,Q מתקיים

$$\begin{aligned} \forall v\in V \qquad & [v]_B = P\,[v]_{B'} \\ \forall w\in W \qquad & [v]_C = Q\,[v]_{C'} \end{aligned}$$

אזי, ממשפט קודם:

$$f(u,v) = [v]_B^t\, A\, [w]_C = \left(P\,[v]_{B'}\right)^t A\left(Q\,[w]_{C'}\right) = [v]_{B'}^t \left(P^tAQ\right)[w]_{C'}$$

משום שגם המטריצה A' מקיימת

$$f(u,v) = [v]_{B'}\, A'\, [w]_{C'}$$

נובע מהאיזומורפיזם בין מרחב התבניות והמטריצות המייצגות שמתקיים

$$A' = P^tAQ$$

■

בדיוק כמו במקרה של טרנספורמציות לינאריות, כאשר דנים בתבניות בי־לינאריות על $V\times V$, נהוג לעבוד עם אותו בסיס בשתי הקואורדינטות. במצב זה, המשפט הקודם אומר שבמעבר מבסיס B לבסיס C של המרחב הווקטורי V המטריצה המייצגת A עוברת למטריצה $A'=P^tAP$. זה מוביל למושג מקביל למושג החשוב של חפיפת מטריצות:

הגדרה 1.10 שתי מטריצות A,C נקראות חופפות אם קיימת מטריצה הפיכה P כך שמתקיים $A=P^tCP$.

זהו למעשה יחס שקילות על מטריצות.