<u>אלגברה לינארית 2א</u>

12 באפריל 2016

1 סיכום הדיון על צורת ז'ורדן

תהי T טרנספורמציה לינארית על מרחב וקטורי W מעל F, $\lambda \in F$. נאמר שהמרחב W הוא מטיפוס W^{λ} (ביחס לטרנספורמציה T) אם קיים m כך שהטרנספורמציה $S = T - \lambda I$ מקיימת $S^m \equiv 0$ וקיים $w \in W$ כך שהקבוצה $\left\{w, Sw, \ldots, S^{m-1}w\right\}$ היא בסיס של W ($\dim W = m$).

<u>הוכחנו:</u>

1. פעולת S (ולכן גם פעולת T) על מרחב מטיפוס W^{λ} היא <u>אי־פריקה</u> (לא ניתן לפרק $W = U_1 \oplus U_2$, כאשר U_1, U_2 אינם טריוויאליים וכן אינווריאנטיים).
2. אם $S = T - \lambda I$ נילפוטנטית על W והמרחב הוא אי־פריק אזי בהכרח W הוא מהטיפוס W^{λ}.

סעיף 1 היה קל, והסעיף השני נבע מטענה כללית שהוכחנו: אם $S = T - \lambda I$ היא נילפוטנטית על מרחב וקטורי Wאזי ניתן לפרק $W = \bigoplus W_i^{\lambda}$, כאשר כל W_i הוא מטיפוס λ (עבור הטרנספורמציה T).

תתי המרחבים עצמם לא נקבעים באופן יחיד על ידי הטרנספורמציה, אבל קבוצת המימדים שלהם כן. ההוכחות היו באינדוקציה על המימד.

נגסח את משפטי הקיום והיחידות של צורת ז'ורדן, ראשית עבור טרנספורמציות ומשם נקבל עבור מטריצות.

אנחנו תמיד מניחים שהפולינום האופייני מתפצל למכפלת גורמים לינאריים מעל F, כלומר

$$f_T(x) = \prod_{i=1}^{r} (x - \lambda_i)^{n_i}$$

ראינו משיקול כללי שתמיד ניתן לפרק את פעולת T על מרחב ווקטורי V כסכום ישר $V = \bigoplus V_i$ כאשר פעולת T על כל V_i היא אי־פריקה.

משפט 1.1 (קיום צורת ז'ורדן) בפירוק הזה, לכל i קיים λ כך שהמרחב V_i הוא מרחב מהטיפוס V_i^{λ}.

משפט 1.2 (יחידות צורת ז'ורדן) בפירוק הזה, לכל ערך עצמי λ_0 של T, מתקיים שהתת־מרחב $\bigoplus V_i^{\lambda_0}$ נקבע לחלוטין על ידי T (ולא רק המימד שלו). תתי המרחבים $V_i^{\lambda_0}$ עצמם לא נקבעים ביחידות על ידי T, λ_0, אבל קבוצת המימדים שמתקבלת עבורם כן.

הוכחה: (משפט הקיום) יהי V_i מרחב אי־פריק בפירוק של V. נרצה להוכיח שקיים $\lambda \in F$ כך שהטרנספורמציה $T-\lambda I$ נילפוטנטית על V_i. אם נדע זאת אזי הדיון בשבוע שעבר הוכיח שהמרחב הוא מהצורה שאנו מתארים.

ואכן, נביט בפולינום המינימלי של Tמצומצם על V_i ונסמנו $m_i(x)$. נרצה להוכיח שמתקיים $m_i(x) = (x-\lambda)^{n_i}$ עבור λ כלשהו. זה יוכיח שמתקיים $(T-\lambda I)^{n_i} \equiv 0$ על V_i, ולכן $T-\lambda I$ נילפוטנטית, וזה מה שרצינו.

אם, בשלילה, $m_i(x)$ אינו מהצורה הזאת, אזי בזכות העובדה שהוא מתפצל למכפלת גורמים לינאריים מעל F (כי הוא מחלק את $m_T(x)$) מתקיים $m_i(x) = \prod (x-\lambda_i)^{k_i}$ וכעת, ממשפט הפירוק הפרימרי, אם מופיע בפירוק יותר מאשר λ_i אחד, נקבל מהמשפט פירוק של V_i לסכום ישר של תתי־מרחבים T־אינווריאנטיים, בסתירה להנחת האי־פריקות.

בכך הוכחנו את משפט הקיום. ∎

הוכחה: (משפט היחידות) מה שצריך לשים אליו לב הוא שלכל ערך עצמי λ_0 מתקיים

$$\{v \in V \mid \exists m : (T-\lambda_0 I)^m v = 0\} := \widetilde{V}_{\lambda_0} = \bigoplus_i V_i^{\lambda_0}$$

ומדוע זאת?

ברור שמתקיימת ההכלה $\supseteq$, מהעובדה שהטרנספורמציה $T-\lambda_0 I$ נילפוטנטית על כל V_i.

כדי להוכיח שוויון נוכיח שוויון מימדים. מצד אחד, הוכחנו שתמיד (תחת הנחת התפצלות $f_T(x)$) קיים פירוק

$$V = \bigoplus_\lambda \widetilde{V}_\lambda$$

ולכן מתקיים

$$\dim V = \sum_\lambda \dim \widetilde{V}_\lambda$$

מצד שני, אם נסמן לכל ערך עצמי λ $V(\lambda) = \bigoplus V_i^\lambda$, אזי

$$V = \bigoplus_\lambda V(\lambda)$$

ולכן

$$\dim V = \sum_\lambda \dim V(\lambda)$$

כעת,

$$\begin{aligned} V(\lambda) &\subseteq \widetilde{V}_\lambda \\ \dim V(\lambda) &\leq \dim \widetilde{V}_\lambda \end{aligned}$$

אבל

$$\sum_{\lambda}\dim V(\lambda)=\dim V=\sum_{\lambda}\dim\widetilde{V}_{\lambda}$$

וזה יכול להתקיים רק אם מתקיים לכל λ השוויון

$$\dim V(\lambda)=\dim\widetilde{V}_{\lambda}$$

ובכך הוכחנו כי המרחב $\bigoplus V_i^{\lambda}$ נקבע ביחידות לפי T.

עבור יחידות המימדים המופיעים בפירוק: $S=T-\lambda I$ היא נילפוטנטית על $\bigoplus V_i^{\lambda}$, ושבוע שעבר הוכחנו שבפירוק של מרחב תחת פעולת טרנספורמציה נילפוטנטית למרחבים אי־פריקים (ציקליים), סדרת המימדים המתקבלת היא יחידה (עד כדי שינוי סדר). ■

<u>**צורת ז'ורדן של מטריצות:**</u> עבור $\lambda\in F$ מגדירים בלוק ז'ורדן $J_n(\lambda)$ בגודל n בתור

$$J_n(\lambda)=\begin{pmatrix}\lambda &&&\\ 1&\lambda&&\\ &\ddots&\ddots&\\ &&1&\lambda\end{pmatrix}$$

משפט 1.3 (קיום צורת ז'ורדן) תהי $A\in M_n(F)$ כך שהפולינום האופייני מתפצל. אזי קיימת מטריצה דומה למטריצה A שהיא מטריצת בלוקים, כשכל בלוק הוא מהצורה $J_m(\lambda)$, עבור m כלשהו וערך עצמי λ כלשהו של A למטריצה זו קוראים צורת ז'ורדן של A.

הוכחה: נובע מיידית ממשפט הקיום לטרנספורמציות לינאריות: תהי T טרנספורמציה המיוצגת על ידי A. יהי $V=\bigoplus V_i^{\lambda}$ הפירוק של המרחב כמו במשפט הקיום. המטריצה המייצגת את הצמצום של T על כל V_i^{λ} היא בדיוק בלוק ז'ורדן $J_m(\lambda)$ כאשר $m=\dim V_i^{\lambda}$, שכן $S=T-\lambda I$ נילפוטנטית, ולוקחים בסיס מהצורה $\{w,Sw,\ldots,S^{m-1}w\}$. ■

משפט 1.4 בכל מטריצה הדומה למטריצה A בצורת ז'ורדן, לכל ערך עצמי λ של A, סכום הגדלים של הבלוקים מהצורה $J_m(\lambda)$ הוא קבוע, ותלוי רק בערך העצמי λ, ובתוך כל λ כזה, הגדלים השונים נקבעים על ידי λ עד כדי הסדר.

הוכחה: נובע ממשפט היחידות של צורת ז'ורדן עבור טרנספורמציות ־ נניח כי C,D דומות למטריצה A בצורת ז'ורדן, ונניח כי A מייצגת את הטרנספורמציה T. לכל ערך עצמי λ של A (ושל T), סכום הגדלים של הבלוקים מהצורה $J_m(\lambda)$ במטריצות C,D הוא מימד המרחב העצמי המוכלל $\widetilde{V}_{\lambda}$ עבור הטרנספורמציה הלינארית T, ולכן שווה עבור C,D (שתיהן מייצגות את T). עכשיו, לכל ערך עצמי λ, הגודל של כל בלוק $J_m(\lambda)$ מתאים למימד של תת־מרחב V_i^{λ} בפירוק $V=\bigoplus V_i^{\lambda}$, והוכחנו כבר שסדרת המימדים הללו נקבעת לפי T. ■