אלגברה לינארית

© ארזים

7 באפריל 2016

1 צורת ז'ורדן

תזכורת: בפרק הזה אנחנו מניחים תמיד שהפולינום האופייני מתפרק מעל F למכפלת גורמים לינאריים (במילים אחרות, כל הערכים העצמיים נמצאים בשדה).

בהנתן טרנספורמציה לינארית T על מרחב ווקטורי V רשמנו

$$f_T = \prod_{i=1}^{k} (x-\lambda_i)^{n_i}$$

כאשר $\lambda_i \neq \lambda_j$ לכל $i \neq j$. משפט הפירוק הפרימרי נותן פירוק של V לסכום ישר של תתי־מרחבים T־אינווריאנטיים

$$V = \bigoplus_{i=1}^{k} \ker (T-\lambda_i I)^{n_i} = \bigoplus_{i=1}^{k} W_i$$

עכשיו אנחנו מנסים להבין את הפעולה של T על כל W_i ־ שוב רוצים לפרק לסכום ישר של המרכיבים הכי בסיסיים ־ האי־פריקים.

נשים לב שעל כל W_i הטרנספורמציה $T-\lambda_i I$ היא נילפוטנטית.

הגדרה 1.1 טרנספורמציה לינארית S נקראת <u>נילפוטנטית</u> אם קיים m כך שמתקיים $S^m \equiv 0$. m המינימלי שמקיים זאת נקרא <u>אינדקס הנילפוטנטיות</u> של S.

נשים לב שכל פירוק של מרחב לתתי־מרחבים T־אינווריאנטיים הוא גם פירוק לתתי־מרחבים $T-\lambda I$־אינווריאנטיים ולהיפך. לכן לאחר שנבין את הפירוק של תתי־המרחבים W_i תחת פעולת כל $S_i = T-\lambda_i I$ למרכיבים אי־פריקים, אלו יהיו גם הרכיבים האי־פריקים לפעולת T עליו.

מכאן אנו ממשיכים כדי לנתח את פעולת טרנספורמציה לינארית נילפוטנטית.

תהי S טרנספורמציה נילפוטנטית על מרחב ווקטורי W. הגדרנו טרנספורמציות מהסוג הזה באופן הבא וקראנו למרחבים הללו S־ציקליים. מעכשיו S נילפוטנטית.

הגדרה 1.2 W ייקרא S־ציקלי אם קיים $w \in W$ כך שהקבוצה $\{w, Sw, S^2w, \ldots, S^{m-1}W\}$ היא בסיס למרחב W, כאשר $S^m = 0$. w כזה נקרא <u>יוצר ציקלי</u> (תחת S).

<u>דוגמאות:</u>

1. טרנספורמציית הגזירה על $\mathbb{R}_n[x]$. היוצר המתאים הוא $w = x^n$.

2. באופן כללי, יהי $W = F^m$, נגדיר טרנספורמצייה לינארית:

$$S(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (0, x_2, \ldots, x_{n-1})$$

וכעת $e_1 = (1, 0, \ldots, 0)$ הוא יוצר ציקלי של W.

הוכחנו שאם S נילפוטנטית והמרחב W הוא S־ציקלי אזי W הוא אי־פריק.
מטרתנו היא להוכיח שאם S נילפוטנטית על W אזי פירוק של W לסכום ישר של תתי מרחבים אי פריקים הוא פירוק שלה לסכום ישר של תתי מרחבים ציקליים (תחת S). כלומר, אנחנו רוצים להראות שאם S נילפוטנטית על W אזי W אי פריק אם ורק אם הוא ציקלי (כאשר את הגרירה מציקלי לאי־פריק הוכחנו כבר והיא קלה יותר).
לפני שנגיע לכך נבין מעט טוב יותר את הפעולה של טרנספורמציה לינארית S על מרחב שהוא סכום ישר של תתי־מרחבים ציקליים.

טענה 1.3 נניח כי S טרנספורמציה לינארית נילפוטנטית על W, וכן

$$W = \bigoplus_{i=1}^{k} W_i$$

כאשר כל W_i הוא ציקלי. אזי:

1. לכל i, $S(W_i) \subseteq W_i$ היא גם תת־מרחב S־ציקלי.
2. $\dim\ker(S|_{W_i}) = 1$.
3. $\dim\ker S = k$.

הוכחה: בסעיפים:

1. מידי מההגדרה שאם $w_i \in W_i$ הוא יוצר ציקלי של S אזי $Sw_i \in S(W_i)$ הוא יוצא ציקלי לפעולת S על $S(W_i)$.

2. ברור שמתקיים $S\left(S^{m_i-1}w_i\right) = 0$ כאשר m_i הוא אינדקס הנילפוטנטיות לפעולת S על W_i. לכן $S^{m_i-1}w_i \in \ker S$. ווקטור זה גם פורש את $\ker S$, כי אם נקבע את i נוכל לקבל:

$$\begin{aligned} v &= \sum_{j=0}^{m_i-1} a_j\left(S^j w_i\right) \in \ker s \\ 0 &= Sv = \sum_{j=0}^{m-1} a_j\left(S^{j+1}w_i\right) = \sum_{j=0}^{m_i-2} a_j\left(S^{j+1}w_i\right) \end{aligned}$$

אבל אלה ווקטורים בת"ל ולכן נקבל שלכל $0 \leq j \leq m_i - 2$ מתקיים $a_j = 0$, ולכן $v = a_{m_i-1}S^{m_i-1}w_i$.

3. עובדה כללית היא שאם

$$W=\bigoplus_{i=1}^{k}W_i$$

הוא פירוק לתתי־מרחבים S-אינווריאנטיים אזי

$$\ker S=\bigoplus_{i=1}^{k}\ker S\mid_{W_i}$$

ומכאן נובעת הטענה מתוך סעיף 2. נותר רק להוכיח עובדה זו.

$$w=\sum_{i=1}^{k}w_i$$

כעת, אם

$$0=S\left(w\right)=\sum_{i=1}^{k}S\left(w_i\right)$$

אזי בגלל שהסכום ישר נובע כי $S\left(w_i\right)=0$ לכל i, ולכן $w_i\in\ker S\mid_{W_i}$.

■

משפט 1.4 תהי S נילפוטנטית על W. אזי קיים בסיס של W מהצורה

$$w_1,Sw_1,\ldots,S^{b_1-1}w_1,w_2,Sw_2,\ldots,S^{b_2-1}w_2,\ldots,w_k,Sw_k,\ldots,S^{b_k-1}w_k$$

כאשר לכל i, $S^{b_i}w_i=0$. כל קבוצה $\left\{w_i,Sw_i,\ldots,S^{b_i-1}w_i\right\}$ נקראת שרשרת ז'ורדן.

הוכחה: באינדוקציה על $\dim W$. אם $\dim W=1$ הטענה טריוויאלית (קל לבדוק).
שלב המעבר: ניזכר שמניחים שהטרנספורמציה S נילפוטנטית. נביט במרחב $U=S\left(W\right)$. כיוון שהסקלר 0 הוא ערך עצמי של S מתקיים $\dim\ker S>0$ ולכן $\dim\mathrm{Im}S<\dim W$, כלומר $\dim U<\dim W$ וניתן להפעיל את הנחת האינדוקציה לפעולת S על U (שהיא כמובן נילפוטנטית). מהנחת האינדוקציה, קיים בסיס למרחב U שהוא איחוד של שרשראות ז'ורדן כמו במשפט:

$$u_1,Su_1,\ldots,S^{b_1-1}u_1,u_2,Su_2,\ldots,S^{b_2-1}u_2,\ldots,u_k,Su_k,\ldots,S^{b_k-1}u_k$$

כפי שכבר ראינו, כל הווקטורים $S^{b_i-1}u_i$ הם בגרעין של S, וכמובן שהם בלתי־תלויים בהיותם חלק מבסיס. כעת נשלים אותם לבסיס של $\ker S$:

$$\left\{S^{b_1-1}u_1,\ldots,S^{b_k-1}u_k,v_1,\ldots,v_m\right\}$$

כיוון שהגדרנו $U=S\left(W\right)$ קיים לכל i ווקטור $w_{i}\in W$ כך שמתקיים $S\left(w_{i}\right)=u_{i}$.
כעת, נוכיח שהקבוצה

$$w_{1},u_{1},Su_{1},\ldots,S^{b_{1}-1}u_{1},w_{2},u_{2},Su_{2},\ldots,S^{b_{2}-1}u_{2},\ldots,w_{k},u_{k},Su_{k},\ldots,S^{b_{k}-1}u_{k},v_{1},\ldots,v_{m}$$

היא בסיס (נשים לב שהיא איחוד של שרשראות ז'ורדן - k הראשונות ברורות, והשאר הן שרשראות באורך אחד, שכן הווקטורים הם בגרעין). עבור אי־תלות לינארית, ניקח צירוף לינארי של איברי הקבוצה שמתאפס. נפעיל עליו את S, ובכך נעלים את $S^{b_{i}-1}u_{i}$ לכל i וכן את v_{i} לכל i (כי הם בגרעין). נקבל שצירוף לינארי של הפעלת S על האיברים הנותרים מתאפס. כל שרשרת בפני עצמה תועתק לשרשרת:

$$Sw_{i}=u_{i},S\left(S^{j}u_{i}\right)=S^{j+1}u_{i}$$

לכן בעצם נקבל צירוף לינארי של

$$u_{1},Su_{1},\ldots,S^{b_{1}-1}u_{1},u_{2},Su_{2},\ldots,S^{b_{2}-1}u_{2},\ldots,u_{k},Su_{k},\ldots,S^{b_{k}-1}u_{k}$$

שמתאפס, אבל קבוצה זו היא בסיס של U ולכן המקדמים שלהם חייבים להתאפס. לכן בצירוף המקורי שלנו שמתאפס, נותרו רק המקדמים של

$$\left\{ S^{b_{1}-1}u_{1},\ldots,S^{b_{k}-1}u_{k},v_{1},\ldots,v_{m}\right\}$$

וקבוצה זו היא בסיס של $\ker S$, ולכן גם המקדמים שלהם חייים להתאפס. לכן כל המקדמים בצירוף התאפסו, והקבוצה הגדולה שלנו היא בלתי־תלוייה לינארית.

עבור פרישה, מספיק להוכיח שמספר האיברים בקבוצה הוא כממד המרחב. נספור את הווקטורים:

$$\left(b_{1}+1\right)+\left(b_{2}+1\right)+\cdots+\left(b_{k}+1\right)+m=\sum_{i=1}^{k}b_{i}+k+m$$

כעת, ממשפט המימדים

$$\dim W=\dim S\left(W\right)+\dim\ker S=\dim U+\dim\ker S$$

כעת, בגלל הבסיס שלנו למרחבים $U,\ker S$ נקבל

$$\begin{aligned}\dim U & = \sum_{i=1}^{k}b_{i}\\ \dim\ker S & = k+m\end{aligned}$$

ולכן הקבוצה הגדולה שלנו היא בסיס - קבוצה בלתי־תלוייה שבה כמות הווקטורים שווה למימד. לכן סיימנו את ההוכחה. ■

נשים לב שהמשפט נותן את הדבר הבא: אם נסמן $W_i = \operatorname{span}\left\{w_i, \ldots, S^{b_i-1}w_i\right\}$, אזי מהבנייה כל w_i הוא S־אינווריאנטי וכן S־ציקלי תחת פעולת S עליו. לכן המשפט נותן פירוק של כל מרחב ווקטורי תחת טרנספורמציה לינארית נילפוטנטית לסכום ישר של מרחבים ציקליים (שהם, כפי שכבר הוכחנו, אי־פריקים). כמו כן, נשים לב שהמשפט הזה נותן את הכיוון ההפוך למה שהוכחנו בסוף השיעור הקודם: כל מרחב אי פריק תית טרנספורמציה נילפוטנטית הוא ציקלי. זאת משום שאם, בסימוני המשפט, k גדול מאחד, קיבלנו פירוק לא טריוויאלי של המרחב לסכום ישר מרחבים S־אינווריאנטים, בסתירה לפריקות. לכן $k=1$ והמרחב ציקלי.

הערה 1.5 המטריצה המתאימה לבסיס $\left\{w, Sw, \ldots, S^{m-1}w\right\}$ של מרחב S־ציקלי היא

$$\begin{pmatrix} 0 & & & \\ 1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

אם S נילפוטנטית על W, מהמשפט הקודם אנחנו יודעים שקיים פירוק

$$W = \bigoplus_{i=1}^{k} W_i$$

למרחבים S־ציקליים. W_i אינם ייחודיים בדרך כלל, אבל כמות והמימדים שלהם ייקבעו ביחידות על ידי S. כלומר:

משפט 1.6 תהי S נילפוטנטית על W, ונניח כי קיימים שני פירוקים של W לסכום ישר של תתי־מרחבים S־אינווריאנטיים וכן S־ציקליים:

$$W = \bigoplus_{i=1}^{k} U_i = \bigoplus_{i=1}^{l} V_i$$

אזי מתקיים $k=l$, ולאחר סידור מחדש מתקיים $\dim U_i = \dim V_i$ לכל i.

הוכחה: שוב, באינדוקציה על $\dim W$. כמובן, המקרה $\dim W = 1$ הוא טריוויאלי. כמו קודם, $S\left(W\right) \subseteq W$ הוא ממימד קטן יותר מאשר W. נניח שקיימים שני פירוקים של W מהצורה שבמשפט. נתבונן כעת במרחב $S\left(W\right)$.

נניח כי המימדים של U_i היו

$$1, 1, 1, \ldots, 1 < n_1 \leq n_2 \leq \cdots \leq n_p$$

כאשר יש כאן s פעמים 1, ומתקיים $k = s+p$.

נניח גם כי המימדים שהתקבלו עבור W_i היו

$$1,1,1,\ldots,1<m_1\leq m_2\leq\cdots\leq m_r$$

כאשר כאן יש t פעמים 1, ומתקיים $l=t+r$.
כל U_i,V_i הוא ציקלי, והוכחנו שתמונת מרחב S-ציקלי תחת S היא שוב ציקלית, ולכן נובע שהפירוק שמתקבל מכל אחת מהאפשרויות הנ"ל עבור $S\left(W\right)$, מבחינת מימדים, הוא

$$0,0,\ldots,0<n_1-1\leq n_2-1\leq\cdots\leq n_p-1$$

וכן

$$0,0,\ldots,0<m_1-1\leq m_2-1\leq\cdots\leq m_r-1$$

כעת מהנחת האינדוקציה $p=r$ וכן לכל i מתקיים $n_i-1=m_i-1$, כלומר $n_i=m_i$.
נותר רק להראות כי $t=s$. זה נובע מכך שמתקיים

$$\begin{aligned}\dim\ker S &= s+p\\ \dim\ker S &= t+r\end{aligned}$$

וזאת מן הטענה שהוכחנו קודם לגבי הגרעין של S ביחס לפירוק. אנחנו כבר יודעים שמתקיים $p=r$, ולכן קיבלנו גם כי $t=s$, ובכך סיימנו את ההוכחה. ■