אלגברה לינארית 2א

ⓒ ארזים

5 באפריל 2016

בעיה: נניח $A\in M_n(\mathbb{Z})$ ורוצים לדעת האם A לכסינה מעל $\mathbb{C}$. איך יודעים?

1. מחשבים פולינום אופייני f_A - אנחנו יודעים לבצע.
2. מוצאים את השורשים שלו, $\{\lambda_i\}$
3. לכל λ_i מחשבים את V_{λ_i} ובסיס לו, וכך מוצאים את $\dim V_{\lambda_i}$.
4. בודקים האם $\sum \dim V_{\lambda_i} = n$ (A לכסינה $\iff$ יש שוויון).

הבעיה היא בשלב 2 - כאשר $n\geq 5$, אין נוסחת פיתרון (ולא יכולה להיות) לפולינום כללי ממעלה 5 ומעלה.
נראה כיצד ניתן לעשות זאת באופן שעוקף את הבעיה. לשם כך ניזכר שבהינתן פולינום $f(x)\in\mathbb{C}[x]$, נגדיר את

$$f^{red}(x) := \frac{f}{\gcd(f,f')}$$

כאשר f' היא הנגזרת הפורמלית של f.
הוכחנו בתרגיל: אם

$$f=\prod_{i=1}^{r}(x-\lambda_i)^{n_i}$$

כאשר $\lambda_i=\lambda_j \;\; \forall i\neq j.$, אזי

$$f^{red}(x)=\prod_{i=1}^{r}(x-\lambda_i)$$

נשים לב שכדי לחשב את f^{red} לא צריך למצוא את כל השורשים. עושים זאת על ידי חישוב של $\gcd(f,f')$ באמצעות אלגוריתם אוקלידס, שהוא מפורש ואלמנטרי.

משפט 0.1 A לכסינה אם ורק אם $f_A^{red}(A)=0$.

הוכחה: נוכיח קודם טענת עזר:

טענה 0.2 בסימונים שלנו, לכל A מתקיים

$$f_A^{red} \mid m_A$$

ושוויון מתקיים אם ורק אם A לכסינה.

הוכחה: כרגיל נסמן $\lambda_1, \ldots \lambda_r$ את כל השורשים השונים של f_A (אלו הם כל הערכים העצמיים של המטריצה A). ממשפט שהוכחנו כולם הם גם שורשים של m_A.

מכאן ברור כי

$$f_A^{red}(x) = \prod_{i=1}^{r}(x-\lambda_i)$$
$$m_A(x) = \prod_{i=1}^{r}(x-\lambda_i)^{r_i}$$

ולכן $f_A^{red} \mid m_A$.

כעת, מצד אחד, אם מתקיים שוויון אזי m_A הוא מכפלת גורמים לינאריים שונים, ומהמשפט שהוכחנו A לכסינה.

מהצד השני, אם A לכסינה, אזי מהמשפט שהוכחנו

$$m_A = \prod_{i=1}^{r}(x-\lambda_i)$$

כאשר הריבוי של כל שורש הוא 1, ולכן מתקיים השוויון. ■

כאן סימנו את הוכחת הטענה. כעת, עבור המשפט:

בכיוון אחד, נניח כי A לכסינה. אזי מהטענה הקודמת $f_A^{red} = m_A$, ולכן מתקיים בהכרח $f_A^{red}(A) = 0$.

בכיוון השני, נניח כי $f_A^{red}(A) = 0$. כעת נובע כי $m_A \mid f_A^{red}$. יחד עם הטענה מקבלים חלוקה בשני הכיוונים, ולכן מתקיים השוויון $f_A^{red} = m_A$, ולכן, מהטענה, A לכסינה. ■

הערה 0.3 כאשר עובדים מעל שדה כללי F עם מציין 0, הכל עובד באופן דומה, אלא שהמשפט נותן קריטריון מתי ניתן ללכסן את A מעל שדה $F \subseteq K$ בו הפולינום האופייני מתפצל למכפלת גורמים לינאריים ־ פשוט מחליפים בהוכחה את השדה $\mathbb{C}$ בשדה K.

הגדרה 0.4 תהי T טרנספורמצייה לינארית על מרחב וקטורי V. אומרים שהמרחב V הוא <u>פריק</u> אם ניתן למצוא שני תתי־מרחבים T־אינווריאנטיים, $U, W \subseteq V$ שאינם $\{0\}$, כך שמתקיים $V = U \oplus W$. זהו פירוק של פעולת T על V לסכום ישר של פעולות על תתי מרחבים U, W. במצב שבו לא קיימים U, W כאלה, אומרים שהמרחב V הוא <u>אי־פריק</u>.

כלומר, נוכל לקבל לכל V שמתקיים

$$V = \bigoplus_{i=1}^{r} W_i$$

כאשר כל W_i הוא T־אינווריאנטי ואי־פריק.

נבהיר שתכונת הפריקות תמיד מתייחסת לפעולת טרנספורמציה לינארית ספציפית, שברורה מההקשר.
המטרה שלנו היא להבין את המרחבים האי־פריקים האפשריים, שהם בעצם "אבני הבניין" לפעולה של כל טרנספורמציה לינארית, וכן להציג את הפעולה של T עליהם באופן פשוט (גם במובן המטריציוני).

מעתה נניח בכל הפרק הזה שהפולינום האופייני f_A מתפצל למכפלת גורמים לינאריים (לאו דווקא שונים) מעל F.

הפירוק הראשון, שקיים לכל טרנספורמציה לינארית T על מרחב וקטורי V, מגיע ממשפט הפירוק הפרימרי.

הגדרה 0.5 יהי $\lambda \in F$ ערך עצמי של T. נסמן את <u>המרחב העצמי המוכלל</u> של λ:

$$\widetilde{V}_\lambda = \{v \in V \mid \exists m \in \mathbb{N}. (T - \lambda I)^m v = 0\}$$

ברור שזהו תת־מרחב (עבור סגירות לסכום, ניקח את m המקסימלי מבין השניים).
נשים לב שבהגדרת $\widetilde{V}_\lambda$, m תלוי בווקטור v, אבל בגלל סופיות המימד, תמיד קיים m_0 מספיק גדול כך שאת $\widetilde{V}_\lambda$ ניתן להגדיר באופן שקול כך:

$$\widetilde{V}_\lambda = \{v \in V \mid (T - \lambda I)^{m_0} v = 0\}$$

מדוע זאת? ניקח בסיס $\{v_i\}$ למרחב $\widetilde{V}_\lambda$. לכל אחד מאיברי הבסיס מתאים m_i משלו. ניקח $m_0 = \max\{m_i\}$. מספר זה עובד לכל איברי הבסיס, ולכן, מלינאריות, לכל המרחב.

<u>**דוגמה:**</u> אם $V = \mathbb{R}_n[x]$, וניקח את T להיות טרנספורמציית הגזירה. אזי $f_T(x) = x^{n+1}$, ולכן רק $\lambda = 0$ הוא ערך עצמי. כעת

$$\begin{aligned} V_0 &= \{p = \text{constant}\} \\ \widetilde{V}_0 &= V \end{aligned}$$

נשים לב שאם λ לא ערך עצמי של הטרנספורמציה, אזי מתקיים

$$\widetilde{V}_\lambda = \{0\}$$

וכמו כן, כמובן מתקיים תמיד

$$V_\lambda \subseteq \widetilde{V}_\lambda$$

משפט 0.6 נניח כי $f \in F[x]$ כך שמתקיים $f(x) = (x-\lambda)^k g(x)$, כאשר $\gcd(x-\lambda, g(x)) = 1$, כלומר λ אינו שורש של g. כמו כן, נניח כי $f(T) = 0$. אזי

$$\widetilde{V}_\lambda = \ker(T - \lambda I)^k$$

כלומר, אם נכתוב $f(x) = g_1(x) \cdot g(x)$, אזי $\widetilde{V}_\lambda = \ker g_1(T)$.

הוכחה: מהמשפט שהוכחנו לפני משפט הפירוק הפרימרי ומהנחת הזרות על g, g_1, נובע כי

$$V = \ker g_1(T) \oplus \ker g(T)$$

מצד שני, ראינו שקיים m מספיק גדול כך שמתקיים

$$\widetilde{V}_\lambda = \ker(T - \lambda I)^m$$

כאשר נוכל להניח, בלי הגבלת הכלליות, כי $k \leq m$.
כעת ינבע, מאותו שיקול בדיוק, כאשר עובדים עם הפולינום $f(x) = (x-\lambda)^m g(x)$, שמתקיים גם

$$V = \ker(T - \lambda I)^m \oplus \ker g(T)$$

כעת, מקבלים מכאן

$$\dim\ker(T - \lambda I)^m = \dim V - \dim\ker g(T) = \dim\ker(T - \lambda I)^k$$

אבל בוודאי מתקיים, שכן $k \leq m$,

$$\ker(T - \lambda I)^k \subseteq \ker(T - \lambda I)^m$$

לכן, משוויון מימדים, נובע שהמרחבים הללו שווים, כלומר,

$$\ker(T - \lambda I)^k = \ker(T - \lambda I)^m = \widetilde{V}_\lambda$$

■

מסקנה 0.7 נניח כי הפולינום המינימלי של T הוא

$$m_T = \prod_{i=1}^{r} (x - \lambda_i)^{r_i}$$

כאשר לכל $i \neq j$ מתקיים $\lambda_i \neq \lambda_j$. אזי הפירוק שמתקבל במשפט הפירוק הפרימרי הוא בדיוק פירוק לסכום ישר של המרחבים העצמיים המוכללים.

מסקנה זו נובעת ישירות מן המשפט הקודם, כאשר לוקחים $f = m_T$. עבור כל ערך עצמי λ_i, המשפט מזהה בין הגרעין של $g_i(x) = (x - \lambda_i)^{r_i}$ ובין $\widetilde{V}_{\lambda_i}$.
לכן, השלב הראשון בפירוק המרחב V למרכיבים אי־פריקים הוא כתיבתו כסכום ישר של מרחבים עצמיים מוכללים.
כעת עלינו להבין את פעולתה של T על כל תת מרחב כזה.
בשלב ראשון, נניח כי $\lambda = 0$. כלומר, על המרחב V מתקיים $T^m = 0$.

הגדרה 0.8 לטרנספורמציה לינארית T על מרחב ווקטורי V כך שמתקיים $T^m \equiv 0$ עבור m כלשהו קוראים טרנספורמציה נילפוטנטית.

הגדרה 0.9 תהי T נילפוטנטית על V. אומרים שהמרחב V הוא T-ציקלי אם קיים ווקטור $v \in V$ כך שהקבוצה $B = \{v, Tv, \dots, T^r v\}$ היא בסיס של V (כאשר $T^{r+1}v = 0$).

נשים לב שאם קיים v כזה, ולוקחים את B הנ"ל כבסיס, אזי המטריצה המייצגת של T ביחס לבסיס B היא

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

נשים לב שאם V הוא T-ציקלי, אזי בהכרח החזקה המינימלית של T שעבורה $T^m = 0$ היא $r+1$ (מביטים בפעולת חזקות של T על v).

משפט 0.10 תהי T נילפוטנטית על V. אזי אם V הוא T-ציקלי אזי V הוא אי־פריק.

הוכחה: נניח שקיים פירוק $V = U \oplus W$. יהי r כמו בסימונים קודם, כלומר $T^{r+1}v = 0$, ולכן $T^{r+1} \equiv 0$, וכן $\dim V = r+1$.

כיוון שהמרחבים U, W אינם $\{0\}$, המימד של כל אחד מהם הוא לכל היותר r. לכן הצמצום של T לכל אחד מהם חייב לקיים $T^r \equiv 0$, כי הפולינום האופייני של הצמצום של T לכל אחד מהם מחלק את x^{r+1}, ודרגתו מימד המרחב, שהוא לכל היותר r. לכן

$$\begin{aligned} \forall u \in U \qquad & T^r(u) = 0 \\ \forall w \in W \qquad & T^r(w) = 0 \end{aligned}$$

לכן נובע כי

$$\forall u \in U \forall w \in W . T^r(u+w) = 0$$

ולכן $T^r(v) = 0$ לכל $v \in V$, אבל הנחנו כי $T^r(v) \neq 0$, שכן החזקה המינימלית שעבורה זה מתקיים צריכה להיות $r+1$. ■