<u>אלגברה לינארית</u>

ⓒ ארזים

31 במרץ 2016

מטרתנו כעת - בהנתן טרנספורמציה לינארית T, למצוא פירוק של V לסכום <u>ישר</u> של תתי־מרחבים שנשמרים תחת פעולת T, והפעולה עליהם כמה שיותר "פשוטה"

נעזר במושג הבסיסי הבא אותו הגדרנו כבר:

הגדרה 0.1 בהנתן $T : V \to V$ טרנספורמציה לינארית, תת מרחב $W \subseteq V$ ייקרא T־אינווריאנטי אם לכל $w \in W$ מתקיים $Tw \in W$.

למשל, מרחב האפס והמרחב כולו, V, הם תמיד אינווריאנטיים, לכל טרנספורמציה לינארית T.

טענה 0.2 תהיינה $T, S : V \to V$ טרנספורמציות לינאריות <u>מתחלפות</u>, כלומר $T \circ S = S \circ T$.

1. $\ker S, \mathrm{Im} S$ הם T־אינווריאנטיים.
2. אם $W \subseteq V$ הוא T־אינווריאנטי אזי גם $S(W)$ הוא T־אינווריאנטי.
3. אם $W_1, W_2 \subseteq V$ הם T־אינווריאנטיים אזי גם $W_1 \cap W_2, W_1 + W_2$.
4. אם $f(x) \in F[x]$ ותת מרחב $W \subseteq V$ הוא T־אינווריאנטי, אזי W הוא גם $f(T)$־אינווריאנטי.

הוכחה: נוכיח כל סעיף בנפרד.

1. הוכחנו כבר, במסגרת ההוכחה על שילוש של מטריצה עם פולינום אופייני מתפצל.
2. למעשה מקרה פרטי של 1 (אותה הוכחה כאשר מביטים על $\mathrm{Im} S$).
3. נביט בתת־המרחב $W = W_1 + W_2$. בהנתן $w \in W$, ניתן לכתוב $w = w_1 + w_2, w_1 \in W_1, w_2 \in W_2$, וכעת

$$Tw = T(w_1 + w_2) = Tw_1 + Tw_2 \in W$$

וזאת משום שתתי המרחבים W_1, W_2 הם T־אינווריאנטים.
לגבי חיתוך: יהי $w \in W = W_1 \cap W_2$, אזי

$$\begin{aligned} Tw &\in W_1 \\ Tw &\in W_2 \end{aligned}$$

ולכן מתקיים $Tw \in W$.

4. ברור שאם W הוא T־אינווריאנטי, אזי הוא T^i־אינווריאנטי לכל חזקה i של T (הפעלה חוזרת של T על W i פעמים). כיוון שנתון כי W תת־מרחב, הוא נשמר גם תחת פעולות של צירוף לינארי של חזקות של T^i עם מקדמים בשדה F.

■

משפט 0.3 תהי $T : V \to V$ טרנספורמציה לינארית, ונניח כי $g, h \in F[x]$ הם פולינומים <u>זרים</u> כך שמתקיים $(gh)(T) = 0$.

1. אזי V מתפרק בתור $V = \ker g(T) \oplus \ker h(T)$, כסכום ישר של תתי־מרחבים T־אינווריאנטיים.

2. יהי m_T הפולינום המינימלי של T, ונניח כי $gh = m_T$. אם נסמן $W_1 = \ker g(T), W_2 = \ker h(T)$, אזי הפולינום המינימלי של הצמצום של T על W_1 הוא g (עד כדי כפל בסקלר), והפולינום המינימלי של הצמצום של T על W_2 הוא h (עד כדי כפל בסקלר).

הוכחה: לפי סעיפים.

1. כיוון שמתקיים $\gcd(g, h) = 1$, קיימים פולינומים $a(x), b(x)$ כך שמתקיים

$$a(x) \cdot g(x) + b(x) \cdot h(x) = 1$$

כאשר נציב בשוויון זה את T נקבל

$$a(T) g(T) + b(T) h(T) = I$$

כתה, בהנתן $v \in V$, נרצה להראות שהוא שייך לסכום של תתי־המרחבים מהמשפט, ואחר כך נראה שהסכום ישר. אכן, נפעיל את השוויון על v:

$$(a(T) g(T)) v + b(T) h(T) v = v$$

לאור זאת, נפעיל את $h(T)$ על המחובר השמאלי:

$$h(T)(g(T) a(T) v) = (h(T) g(T))(a(T) v) = 0 (a(T) v) = 0$$

וזאת מן ההנחה כי $gh(T) = 0$. לכן $a(T) g(T) \in \ker h(T)$. באותה צורה נשיג $b(T) h(T) \in \ker g(T)$. לכן קיבלנו כי $V = \ker g(T) + \ker h(T)$. נשאר להוכיח שהסכום הוא ישר, כלומר

$$\ker g(T) \cap \ker h(T) = \{0\}$$

ואכן, יהי v וקטור בחיתוך. נשתמש בשוויון

$$v = (a(T) g(T)) v + b(T) h(T) v = a(T) \cdot 0 + b(T) \cdot 0 = 0$$

ולכן קיבלנו את סעיף 1.

2. נסמן את הצמצום של T על $W_1 = \ker g(T)$ בתור T_1, ואת הצמצום של T על $W_2 = \ker h(T)$ בתור T_1. סעיף 1 אומר שמתקיים $V = W_1 \oplus W_2$, כאשר שני תתי המרחבים הם T־אינווריאנטיים, כלומר W_i נשמר תחת T_i עבור $i = 1, 2$.
אם בוחרים בסיס של V שהוא איחוד של בסיסים של W_1, W_2, המטריצה המייצגת את T היא מהצורה

$$[T] = \begin{pmatrix} [T_1] & 0 \\ 0 & [T_2] \end{pmatrix}$$

ממשפט שהוכחנו, מתקיים כי $m_T = \operatorname{lcm}(m_{T_1}, m_{T_2})$. יש להוכיח כי $g = m_{T_1}, h = m_{T_2}$. אכן, כיוון שמתקיים $m_T = gh$, ולכן $\deg m_T = \deg g + \deg h$. כעת, כיוון שמתקיים $g(T) = 0$ על W_1, וכן $h(T) = 0$ על W_2, חייב להתקיים גם $m_{T_1} \mid g, m_{T_2} \mid h$, וכעת נובע

$$\begin{aligned} \deg m_T &= \deg g + \deg h \geq \deg m_{T_1} + \deg m_{T_w} = \deg m_{T_1} m_{T_2} \geq \\ &\geq \deg \operatorname{lcm}(m_{T_1}, m_{T_2}) = \deg m_T \end{aligned}$$

קיבלנו שוויון בסופו של דבר, ולכן בכל מקום שבו הופיע אי־שוויון חלש היה חייב להיות שוויון. כלומר $\deg g = \deg m_{T_1}, \deg h = \deg m_{T_2}$. אבל בנוסף יש חלוקה $(m_{T_1} \mid g, m_{T_2} \mid h)$, ולכן הם נבדלים בקבוע ־ כלומר, הם שווים עד כדי כפל בסקלר.

■

משפט 0.4 (משפט הפירוק הפרימרי) תהי T טרנספורמציה על מרחב וקטורי V, ויהי m_T הפולינום המינימלי שלה. יהי $m_T = g_1 \cdot g_2 \cdot \cdots \cdot g_s$ פירוק של m_T למכפלת פולינומים <u>זרים בזוגות</u>. אזי קיים פירוק של V לסכום ישר של תתי מרחבים T־אינווריאנטים

$$V = \bigoplus_{i=1}^{s} \ker g_i(T)$$

כאשר הפולינום המינימלי של הצמצום של T על $\ker g_i T$ הוא $g_i(x)$.

הוכחה: המקרה $s = 2$ הוא בדיוק חלק 2 של המשפט הקודם. המקרה הכללי נובע מיידית באינדוקציה על s. באופן כללי: מסמנים $g_2 \cdot \cdots \cdot g_s = h$, וכעת מההנחה נובע כי $\gcd(g_1, h) = 1$, ולכן קיבלנו שני פולינומים זרים כך שמתקיים $m_T = g_1 h$. נפעיל את חלק 2 של המשפט הקודם, ונקבל $V = \ker g_1(T) \oplus \ker h(T)$. כעת, נמשיך עם הנחת האינדוקציה על $s - 1$, עבור הצמצום של T על $\ker h(T)$ (שהפולינום המינימלי שלו הוא h). ■

<u>דוגמה חשובה:</u> נניח שהפולינום המינימלי m_T מתפרק למכפלת גורמים לינאריים שונים, כלומר

$$m_T(x) = \prod_{i=1}^{r} (x - \lambda_i)$$

כאשר לכל $i \neq j$ מתקיים $\lambda_i \neq \lambda_j$. אזי לפי משפט הפירוק הפרימרי מתקיים

$$V = \bigoplus_{i=1}^{r} \ker\left(T - \lambda_i I\right)$$

זהו פירוק של V לסכום ישר של מרחבים עצמיים, בהם הערך העצמי של T הוא λ_i. בפרט, T לכסינה.
למעשה, הוכחנו כאן את המשפט הבא:

משפט 0.5 אם $m_T\left(x\right)$ מתפרק למכפלת גורמים לינאריים שונים, אזי T לכסינה.

הערה 0.6 את הכיוון ההפוך ראינו מזמן, והוא קל.

דוגמה: בטרנספורמציית הזהות I, $m_T = x - 1$. כאן $r = 1$ (למרות שהפולינום האופייני הוא $n = \dim V$,$(x-1)^n$), ואכן, כל המרחב כולו הוא מרחב עצמי של הערך העצמי 1.
דוגמה לשימוש יפה היא הטענה החשובה הבאה:

משפט 0.7 תהי T טרנספורמציה לינארית לכסינה על V. יהי $W \subseteq V$ תת־מרחב T־אינווריאנטי. אזי הצמצום של T על W גם הוא לכסין.

הוכחה: מהלכסינות של T,

$$m_T = \prod_{i=1}^{r} \left(x - \lambda_i\right)$$

כאשר אם $i \neq j$ מתקיים $\lambda_i \neq \lambda_j$. נסמן את הצמצום של T על W בתור T_1. כעת, בוודאי מתקיים $m_{T_1} \mid m_T$. לכן, מתקיים גם

$$m_T = \prod_{k=1}^{s} \left(x - \lambda_k\right)$$

כאשר המכפלה עוברת על פני תת־קבוצה של λ_i. בפרט, הגורמים הלינאריים שונים זה מזה, ולכן T_1 לכסינה מעל W מהמשפט הקודם. ■