אלגברה לינארית 2א

© ארזים

25 בפברואר 2016

1 הקדמה - סדרת פיבונאצ'י

$$0,1,1,2,3,5,8,13,\ldots$$

$$a_{n+1}=a_n+a_{n-1}$$

$$\begin{pmatrix}a_{n+1}\\a_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_n\\a_{n-1}\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{pmatrix}a_{n+1}\\a_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}^n\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$

לכן, אם נמצא דרך לחשב חזקות של כל מטריצה נתונה, נדע לחשב באופן מדוייק את האיבר הכללי של סדרת פיבונאצ'י.

2 ווקטורים וערכים עצמיים

הגדרה 2.1 יהי F שדה, V מרחב ווקטורי מעל F, ותהי $T:V\to V$ טרנספורמציה לינארית. ווקטור $\theta=v\in V$ ייקרא ווקטור עצמי (ו"ע) של הטרנספורמציה T אם קיים סקלר $\lambda\in F$ כך שמתקיים

$$T(v)=\lambda v$$

נשים לב שעבור $v=\theta$, מתקיים $Tv=\lambda v$ לכל סקלר $\lambda\in F$, שכן $T(\theta)=\theta$. לכן את θ לא רואים כווקטור עצמי. מצד שני, כאשר $v\neq\theta$, הסקלר λ נקבע באופן יחיד:

$$\begin{cases} T(v)=\lambda_1 v \\ T(v)=\lambda_2 v \end{cases} \Rightarrow \lambda_1 v=\lambda_2 v \Rightarrow^{v\neq\theta} \lambda_1=\lambda_2$$

הגדרה 2.2 סקלר λ כזה נקרא ערך עצמי (ע"ע) של הווקטור v.

נוכל גם להגיד שסקלר λ הוא ערך עצמי של T בלי להתייחס לווקטור עצמי. בזאת אומרים שקיים $\theta\neq v\in V$ כך שמתקיים $T(v)=\lambda v$.

נשים לב שאם v ווקטור עצמי של T עם ערך עצמי λ, אזי לכל סקלר $c\in F$, הווקטור $u=cv$ הוא גם ווקטור עצמי של T עם ערך עצמי λ:

$$T(u)=T(cv)=cT(v)=c(\lambda v)=\lambda(cv)=\lambda u$$

הגדרה 2.3 תהי $T:V\to V$ טרנספורמציה לינארית, ויהי $\lambda\in F$. נגדיר את המרחב העצמי המתאים לערך עצמי λ:

$$V_\lambda=\{v\mid T(v)=\lambda v\}$$

במרחב זה נמצאים כל הווקטור עצמי במרחב V עם ערך עצמי λ בתוספת ווקטור האפס.

משפט 2.4 לכל $\lambda\in F$, V_λ הוא תת־מרחב של V.

הוכחה: דרך אחת: לבדוק ישירות סגירות לחיבור וכפל בסקלר. דרך אחרת: תהי $I:V\to V$ טרנספורמציית הזהות, λI טרנספורמציית הכפל בסקלר λ. אזי את V_λ ניתן לתאר על ידי $V_\lambda=\ker(T-\lambda I)$. אמנם:

$$(T-\lambda I)(v)=\theta \iff T(v)-\lambda v=\theta \iff T(v)=\lambda v$$

■

הגדרה 2.5 תהי $T:V\to V$ טרנספורמציה לינארית, $\lambda\in F$. הריבוי הגיאומטרי של λ ביחס לטרנספורמציה T מוגדר להיות המימד של V_λ.

בהינתן טרנספורמציה לינארית T המצב האופטימאלי הוא כשניתן למצוא בסיס למרחב הווקטורי V שמורכב מווקטורים עצמיים של T. במצב הזה, המטריצה המייצגת את T ביחס לבסיס זה היא אלכסונית.

הגדרה 2.6 אם עבור טרנספורמציה לינארית $T:V\to V$ קיים בסיס למרחב V שמורכב מווקטורים עצמיים של T, אומרים שהטרנספורמציה T לכסינה. אומרים גם שהטרנספורמציה T ניתנת ללכסון.

משפט 2.7 תהי $T:V\to V$ טרנספורמציה לינארית, ותהי $A\subseteq V$ קבוצת ווקטורים שכולם ווקטורים עצמיים של T עם ע"ע שונים זה מזה. אזי A בלתי תלויה לינארית.

הוכחה: נניח בשלילה שקיימת תלות לינארית בין איברי A. מבין כל הצירופים הלינאריים הלא־טריוויאליים של איברי A שמתאפסים, נבחר את זה שמערב מספר מינימלי של איברי A. נסמן את מספר בווקטורים בתלות כזו m. נשים לב שבהכרח $m\geq 2$ ־ אם $m=1$, התלות היא מהצורה $cv=\theta$, כאשר $c\neq 0$ (כי מדובר בצירוף לינארי לא־טריוויאלי) וכן $v\neq\theta$ (שכן הוא ווקטור עצמי), וזו סתירה. כעת נראה שאפשר לייצר תלות לינארית בין איברי A בעלת אורך קטן יותר, בסתירה למינימליות m. תהי

$$\sum_{i=1}^{m}a_iv_i=\theta$$

תלות לינארית באורך m. ברור שלכל $1\leq i\leq m$, $a_i\neq 0$ ־ אחרת נזרוק את המחובר שמספרו i ונקבל תלות קצרה יותר.

כעת נפעיל את הטרנספורמציה הלינארית T על התלות שלנו:

$$T\left(\theta\right)=\theta=T\left(\sum_{i=1}^{m}a_iv_i\right)=\sum_{i=1}^{m}a_iT\left(v_i\right)=\sum_{i=1}^{m}a_i\lambda_iv_i$$

מצד שני, נכפיל את התלות המקורית בסקלר λ_m:

$$\theta=\sum_{i=1}^{m}a_i\lambda_mv_i$$

בסך הכל, קיבלנו:

$$-\begin{cases}\theta=\sum_{i=1}^{m}a_i\lambda_iv_i\\ \theta=\sum_{i=1}^{m}a_i\lambda_mv_i\end{cases}$$

$$\theta=\sum_{i=1}^{m}a_i\left(\lambda_i-\lambda_m\right)v_i=\sum_{i=1}^{m-1}a_i\left(\lambda_i-\lambda_m\right)v_i$$

וזהו צירוף לינארי לא־טריוויאלי, שכן לכל $1\leq i\leq m-1$, $\lambda_i\neq\lambda_m$. קיבלנו, אם כן, תלות לינארית באורך $m-1$, בסתירה למינימליות m. ■