אלגבראות לי

ⓒ ארזים

20 במאי 2019

1 אלגבראות לי פשוטות למחצה

1.1 תת אלגבראות של קרטן

משפט 1.1 תהי L אלגברת לי (ממימד סופי מעל F). תהי $H \subset L$ תת אלגברת לי נילפוטנטית. נניח כי לכל $x \in H$ האופרטור $\pi(x) = \mathrm{ad}_L x$ ניתן לשילוש מעל F. לכל $\lambda \in H^*$ נגדיר

$$L_H^\lambda = \{v \in L \mid \forall x \in H \exists n = n_{x,v} \ (\pi(x) - \lambda(x))^n v = 0\}$$

אזי מתקיים:

1.
$$L = \bigoplus_{\lambda \in H^*} L_H^\lambda$$

2. לכל $\lambda, \mu \in H^*$ מתקיים $\left[L_H^\lambda, L_H^\mu\right] \subset L_H^{\lambda+\mu}$. בפרט, $\left[L_H^\lambda, L_H^0\right] \subset L_H^\lambda$.
3. $L_H^0 \subset L$ היא תת אלגברת לי המכילה את H.
4. H היא תת אלגברת קרטן אם ורק אם $L_H^0 = H$.
5. אם L_H^0 היא תת אלגברת לי נילפוטנטית, אזי היא תת אלגברת קרטן.

הוכחה: ממשפט לי, ומכיוון שידוע לנו כי H נילפוטנטית (ובפרט פתירה), π ניתנת לשילוש סימולטני. לכן יש בסיס B של L עבורו $[\pi(x)]_B$ משולשת עליונה לכל $x \in H$. נסמן את האלכסון של של $[\pi(x)]_B$ בתור $\lambda_1(x), \ldots, \lambda_n(x)$. הטיעונים הבאים שנערוך (לסעיפים 1,2) תקפים לכל הצגה π של H שכל אופרטור שלה ניתן לשילוש.

1. ראשית נניח כי $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = \lambda$. במקרה זה, המטריצה $[\pi(x) - \lambda I]_B$ היא משולשית עליונה עם אלכסון שכולו אפסים - ולכן חזקת n שלה מתאפסת. לכן נקבל

$$V_\pi = V_H^\lambda$$

כאן ברור גם כי לכל $\lambda \neq \mu \in H^*$ נקבל $V_H^\mu = 0$. כעת, נניח כי לא כל הערכים λ_i שווים זה לזה, כלומר יש איבר $x_0 \in H$ עבורו לא כל הערכים $\lambda_i(x_0)$ זהים. יהיו $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ כל הערכים העצמיים השונים של $\pi(x_0)$. אזי יש פירוק

$$V_\pi = \bigoplus_{i=1}^{r} V(\alpha_i)$$

כאשר

$$V\left(\alpha_i\right)=\left\{v\in V \mid \exists n=n_v\ \left(\pi\left(x_0\right)-\alpha_i I\right)^n v=0\right\}$$

נראה כי המרחב $V\left(\alpha_i\right)$ הוא תת מרחב אינווריאנטי תחת π, כלומר לכל $y\in H$ נרצה להראות כי

$$\pi\left(y\right)\left(V\left(\alpha_i\right)\right)\subset V\left(\alpha_i\right)$$

נשים לב, באינדוקציה, כי מתקיים

$$\left(\pi\left(x_0\right)-\alpha_i I\right)^n\pi\left(y\right)=\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}\pi\left(\mathrm{ad}^{n-j}x_0\left(y\right)\right)\left(\pi\left(x_0\right)-\alpha_i I\right)^j$$

למשל, עבור $n=1$ נקבל

$$\begin{aligned}\left(\pi\left(x_0\right)-\alpha_i I\right)\pi\left(y\right)=\pi\left(x_0\right)\pi\left(y\right)-\alpha_i\pi\left(y\right)=\pi\left(y\right)\pi\left(x_0\right)+\pi\left(\left[x_0,y\right]\right)-\alpha_i\pi\left(y\right)=\\=\pi\left(y\right)\left(\pi\left(x_0\right)-\alpha_i I\right)+\pi\left(\mathrm{ad}_L x_0\left(y\right)\right)\end{aligned}$$

במקרה הכללי:

$$\left(\pi\left(x_0\right)-\alpha_i I\right)^{n+1}\pi\left(y\right)=\left(\pi\left(x_0\right)-\alpha_i I\right)^n\left(\pi\left(y\right)\pi\left(x_0\right)-\alpha_i\pi\left(y\right)+\pi\left(\mathrm{ad}_L x_0\left(y\right)\right)\right)=\dots$$

מכאן מציבים את הנחת האינדוקציה ומקבלים את הנדרש בקלות. אם כן, יהי $v\in V\left(\alpha_i\right)$. נניח כי $\left(\pi\left(x_0\right)-\alpha_i I\right)^N v=0$. ניקח $n=2N$ ונקבל

$$\left(\pi\left(x_0\right)-\alpha_i I\right)^{2N}\pi\left(y\right)v=\sum_{j=0}^{2N}\binom{2N}{j}\pi\left(\mathrm{ad}^{2N-j}x_0\left(y\right)\right)\left(\pi\left(x_0\right)-\alpha_i I\right)^j v$$

אם $j\geq N$, נקבל $\left(\pi\left(x_0\right)-\alpha_i I\right)^j v=0$. אם $j<N$ אזי $2N-j>N$. H נילפוטנטית, ולכן נניח גם כי $\mathrm{ad}_H^N x=0$ לכל $x\in H$ (אפשר להגדיל את N אם צריך), ואז נקבל כי $\mathrm{ad}^{2N-j}x_0\left(y\right)=0$. זה מראה כי $\pi\left(y\right)v\in V\left(\alpha_i\right)$ לכל $y\in H$. מתקיים $\dim V\left(\alpha_i\right)<\dim V_\pi$, ולכן באינדוקציה

$$V\left(\alpha_i\right)=\bigoplus_{j=1}^{n_i}V\left(\alpha_i\right)_H^{\lambda_{i,j}}$$

כאשר $\lambda_{i,j}\in H^*$, וכן

$$V\left(\alpha_i\right)_H^{\lambda_{i,j}}=\left\{v\in V\left(\alpha_i\right) \mid \forall x\in H\exists n=n_{x,v}\ \left(\pi\left(x\right)-\lambda_{i,j}\left(x\right)I\right)^n v=0\right\}$$

נקבל אם כן כי

$$V=\bigoplus_{i=1}^{r}\left(\bigoplus_{j=1}^{n_i}V\left(\alpha_i\right)_H^{\lambda_{i,j}}\right)$$

נשים לב כי עבור j,j' ועבור $i_1\neq i_2$, נקבל $\lambda_{i_1,j}\neq\lambda_{i_2,j'}$, שכן

$$\lambda_{i_1,j}\left(x_0\right)=\alpha_{i_1}\neq\alpha_{i_2}=\lambda_{i_2,j}\left(x_0\right)$$

כך הוכחנו את סעיף 1.

2. יהיו $u \in L_H^{\lambda}, v \in L_H^{\mu}$. נרצה להראות כי

$$\left(\pi\left(x\right)-\left(\lambda\left(x\right)+\mu\left(x\right)\right)I\right)^{n}\left[u,v\right]=0$$

עבור n גדול מספיק. עבור $n=1$, נקבל

$$\begin{aligned}\pi\left(x\right)\left(\left[u,v\right]\right)-\left(\lambda\left(x\right)+\mu\left(x\right)\right)\left[u,v\right] &= \left[\pi\left(x\right)u,v\right]+\left[u,\pi\left(x\right)v\right]-\left(\lambda\left(x\right)+\mu\left(x\right)\right)\left[u,v\right]=\\ &=\left[\left(\pi\left(x\right)-\lambda\left(x\right)I\right)u,v\right]+\left[u,\left(\pi\left(x\right)-\mu\left(x\right)I\right)v\right]\end{aligned}$$

עבור n כללי מראים באינדוקציה כי

$$\left(\pi\left(x\right)-\left(\lambda\left(x\right)+\mu\left(x\right)\right)I\right)^{n}=\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}\left[\left(\pi\left(x\right)-\lambda\left(x\right)I\right)^{j}u,\left(\pi\left(x\right)-\mu\left(x\right)I\right)^{n-j}v\right]$$

עבור n גדול מספיק אחד האיברים בכל קומוטטור יהיה 0 - כלומר זה מתאפס עבור n גדול מספיק (שתלוי כמובן בערכים x,u,v). בזאת סיימנו את סעיף 2 - כמובן שהמקרה הפרטי $\mu=0$ נובע.

3. (מכאן נחזור לזכור כי $\pi=\mathrm{ad}$) מהסעיף הקודם נקבל כי $\left[L_H^0,L_H^0\right]\subset L_H^0$. H נילפוטנטית, ולכן יש n (אפילו קבוע) כך שלכל $y\in H$ מתקיים

$$\mathrm{ad}_{H}^{n}y=0$$

ולכן לכל $x\in H$ מתקיים

$$\mathrm{ad}^{n}y\left(x\right)=0$$

ולכן $x\in L^0$. בסך הכל נקבל כי $H\subset L^0$ כפי שרצינו.

4. נסמן $N=N_L\left(H\right)$. לכל $x\in H$, מההגדרה מתקיים בהכרח כי

$$\mathrm{ad}x\left(N\right)\subset H$$

מכאן נקבל כי

$$\mathrm{ad}^{j+1}x\left(N\right)\subset\mathrm{ad}^{j}x\left(H\right)$$

אגף ימין מתאפס עבור j גדול מספיק שכן H נילפוטנטית. לכן נקבל כי $N\subset L_H^0$, ולכן $H\subset N\subset L_H^0$. לכן אם $L_H^0=H$ נקבל כי $N=H$ ולכן H תת אלגברת קרטן. להיפך, נניח כי H תת אלגברת קרטן, כלומר $N=H$. נניח בשלילה כי $H\subsetneq L_H^0$. נתבונן באותו L_H^0 בתור מרחב הצגה של H על ידי ההצגה $\sigma\left(x\right)=\mathrm{ad}x\mid_{L_H^0}$. H הוא תת מרחב אינווריאנטי. תהי $\overline{\sigma}$ ההצגה של H במרחב המנה L_H^0/H. ברור כי σ ניתנת לשילוש וכן $\overline{\sigma}$. השילוש של $\overline{\sigma}$ הוא במטריצות משולשיות עליונות נילפוטנטיות, כלומר יש להן 0 על האלכסון - בפרט קיים $0\neq\overline{x_0}\in L_H^0/H$ ווקטור עצמי סימולטני של $\overline{\sigma}\left(H\right)$ ביחס לערך העצמי אפס - $\overline{\sigma}\left(x\right)\left(\overline{x_0}\right)=0$ לכל $x\in H$. אם כן, לכל $x\in H$ נקבל כי

$$\left[x,x_0\right]\in H$$

כלומר $x_0\in L_H^0\backslash H$, ובפרט $x_0\in N_L\left(H\right)\backslash H$, בסתירה להנחה שלנו כי $N_L\left(H\right)=H$.

5. נניח כי L_H^0 תת אלגברת לי נילפוטנטית. נחזור על הסעיפים הקודמים עבור $\mathcal{H} = L_H^0$, ונקבל תת אלגברת לי

$$\mathcal{L}_H^0 = L_{\mathcal{H}}^0 = \{v \in L \mid \forall x \in \mathcal{H} \exists n = n_{x,v} \operatorname{ad}^n x(v) = 0\}$$

אנחנו יודעים כי $H \subset \mathcal{H} = L_H^0$, ובפרט, לכל $x \in H$ ולכל $v \in \mathcal{L}_H^0$ יש n עבורו $\operatorname{ad}^n x(v) = 0$, ולכן $v \in L_H^0$ - לכן הראינו כי

$$\mathcal{L}_H^0 \subset L_H^0$$

נסיק כי למעשה $\mathcal{L}_H^0 = L_H^0 = \mathcal{H}$ ומסעיף 4 נסיק כי $\mathcal{H} = L^0$ תת אלגברת קרטן.

■

מסקנה 1.2 תהי $H \subset L$ תת אלגברת קרטן. אזי H היא תת אלגברת לי נילפוטנטית מקסימלית.

הוכחה: נניח כי F סגור אלגברית. תהי $H \subset H' \subset L$ תת אלגברת לי נילפוטנטית. מכאן יש n טבעי כך שלכל $x \in H$ ולכל $x' \in H'$ מתקיים

$$\operatorname{ad}^n x(x') = 0$$

שכן H נילפוטנטית. לכן נקבל כי

$$x' \in L_H^0$$

אם כן, הראינו כי $H' \subset L_H^0$. לפי סעיף 4 במשפט הקודם, $L_H^0 = H$ שכן H תת אלגברת קרטן. בסך הכל נקבל כי $H' = H$. עבור F כללי, ראינו כי $H_{\overline{F}} \subset L_{\overline{F}}$ תת אלגברת קרטן. כמו כן $H_{\overline{F}} \subset H'_{\overline{F}}$ נילפוטנטית, ולכן

$$H' \otimes_F \overline{F} = H'_{\overline{F}} = H_{\overline{F}} = H \otimes_F \overline{F}$$

מכאן $H' \otimes 1 \subset H \otimes \overline{F}$ ולכן $H' \subset H$ - כלומר $H' = H$. ■

אם כן, כאשר H תת אלגברת קרטן נקבל כי

$$L = H \oplus \left(\bigoplus_{i=1}^{n} L_H^{\lambda_i} \right)$$

כאשר $0 \neq \lambda_i \in H^*$, והמטריצות של $\operatorname{ad}_L x$ לפי הבסיס המשלש B הן מטריצות בלוקים אלכסוניות - כל בלוק הוא משולשי עליון, עם הערך $\lambda_i(x)$ על האלכסון, ויש גם בלוק אחד (הראשון) שבו אפסים על האלכסון (בלוק זה בגודל $\dim H$).

טענה 1.3 בהנחות המשפט, תהי κ_L תבנית קילינג של L.

1. יהיו $\lambda, \mu \in H^*$ עבורם $\lambda + \mu \neq 0$, אזי

$$\kappa_L\left(L_H^\lambda, L_H^\mu\right) = 0$$

2. לכל $0 \neq \lambda \in H^*$ מתקיים

$$\kappa_L\left(H, L_0^\lambda\right) = 0$$

3. לכל $x, y \in H$ מתקיים

$$\kappa_L(x, y) = \sum_{\lambda \in H^*} \left(\dim L_H^\lambda\right) \lambda(x) \lambda(y)$$

הוכחה:

1. נניח כי $x \in L_H^\lambda$, $y \in L_H^\mu$, ויהי ν עבורו $L_H^\nu \neq 0$. אזי

$$\begin{aligned} \mathrm{ad}x\left(L_H^\nu\right) &\subset L_H^{\nu+\lambda} \\ \mathrm{ad}y \circ \mathrm{ad}x\left(L_H^\nu\right) &\subset L_H^{\nu+(\lambda+\mu)} \end{aligned}$$

לכן, אם $\lambda + \mu \neq 0$ וכן $L^{\nu+\lambda+\mu} \neq 0$, נסיק כי

$$\mathrm{tr}\left(\mathrm{ad}x \circ \mathrm{ad}y\right) = 0$$

ולמעשה המטריצה $\mathrm{ad}x \circ \mathrm{ad}y$ נילפוטנטית.

2. מקרה פרטי של 1, שכן $H \subset L_H^0$.

3. יהי $x, y \in H$. המטריצה של $\mathrm{ad}_L x$ תהיה שוב מטריצת בלוקים אלכסונית כמו קודם - פשוט במקום בלוק ראשון בגודל $\dim H$ נקבל בלוק ראשון בגודל $\dim L_H^0$ (H לאו דווקא קרטן ולכן לאו דווקא $L_H^0 = H$). באותה צורה גם עבור $\mathrm{ad}_L y$. אם כן, המטריצה $\mathrm{ad}_L x \circ \mathrm{ad}_L y$ תהיה מכפלה של שתי מטריצות בלוקים שכאלה. על ידי הצבה ובדיקה ישירה בדיוק

$$\kappa_L(x, y) = \mathrm{tr}\left(\mathrm{ad}_L x \circ \mathrm{ad}_L y\right) = \sum_{i=1}^n \dim L_H^{\lambda_i} \lambda_i(x) \lambda_i(y)$$

■

משפט 1.4 תהי L אלגברת לי פשוטה למחצה. תהי $H \subset L$ תת אלגברת לי נילפוטנטית עבורה האופרטורים $\mathrm{ad}_L x$ ניתנים לשילוש מעל F לכל $x \in H$. אזי L_H^0 רדוקטיבית בתוך L.

הוכחה: נכתוב את הפירוק

$$L = L_H^0 \oplus \left(\bigoplus_{\lambda \in R} L_H^\lambda\right)$$

כמו במשפט. בטענה ראינו כי $\kappa_L\left(L_H^0, L_H^\lambda\right)=0$ לכל $0\neq\lambda\in H^*$. κ_L לא מנוונת, ולכן נסיק כי $\kappa_L\mid_{L_H^0\times L_H^0}$ לא מנוונת. יהי $x\in L_H^0$. נכתוב $x=x_s+x_m$, ונראה כי $x_s,x_n\in L^0$. יהי $y\in H$. יש m טבעי עבורו $\mathrm{ad}^m y\left(x\right)=0$. נכתוב $y=y_s+y_n$. ואז

$$\mathrm{ad}_L y=\mathrm{ad}_L y_s+\mathrm{ad}_L y_n$$

ניזכר כי $\mathrm{ad}_L y_s$ הוא פולינום ללא איבר חופשי של $\mathrm{ad}_L y$ במקדמים מתוך $\overline{F}$. מכאן נקבל כי $\mathrm{ad}^m y_s\left(x\right)=0$. $\mathrm{ad}_L y_s$ איבר פשוט למחצה (ניתן ללכסון מעל $\overline{F}$), ולכן x וקטור עצמי של $\mathrm{ad}^m y_s$ עם ערך עצמי 0. לכן למעשה x וקטור עצמי גם של $\mathrm{ad}_L y_s$ עם ערך עצמי 0 - כלומר $[y_s,x]=0$, כלומר $\mathrm{ad}_L x\left(y_s\right)=0$. אותו נימוק בדיוק מראה כי $[y_s,x_s]=0$.
מכאן, עבור k גדול מספיק נקבל כי

$$\mathrm{ad}^k y\left(x_s\right)=0$$

נזכור כי $\mathrm{ad}_L y_s,\mathrm{ad}_L y_n$ מתחלפים, ועל כן

$$\mathrm{ad}^k y\left(x_s\right)=\left(\mathrm{ad} y_s+\mathrm{ad} y_n\right)^k\left(x_s\right)=\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}\mathrm{ad}^{k-j}y_n\mathrm{ad}^j y_s\left(x_s\right)=\mathrm{ad}^k y_n\left(x_s\right)$$

כל שאר המחוברים מתאפסים בגלל שראינו $[y_s,x_s]=0$. כעת, $\mathrm{ad}_L y_n$ נילפוטנטי, ולכן נקבל 0 עבור k גדול מספיק. $y\in H$ היה כלשהו, ועל כן נקבל כי $x_s\in L_H^0$ - ועל כן כמובן גם $x_n\in L_H^0$. ■

כעת עבור $x\in L$ נתבונן בפולינום האופייני של $\mathrm{ad}_L x$ -

$$\det\left(t\cdot I_L-\mathrm{ad}_L x\right)=t^n+a_{n-1}\left(x\right)t^{n-1}+\cdots+a_1\left(x\right)t+a_0\left(x\right)$$

המקדמים $a_i\left(x\right)$ הם פונקציות פולינומיאליות על L. כמובן נקבל כי $a_0\left(x\right)=0$. יהי l הטבעי הראשון עבורו הפונקציה $x\mapsto a_l\left(x\right)$ אינה זהותית 0.

הגדרה 1.5 l הזה ייקרא <u>הדרגה</u> של אלגברת לי L, ונסמן $l=\mathrm{rank}L$.

עבור $x\in L$ נגדיר

$$L^0\left(x\right)=\left\{v\in L\mid\exists n=n_v\ \mathrm{ad}^n x\left(v\right)=0\right\}$$

כמובן $x\in L^0\left(x\right)$. אפשר לבחור בסיס של $L^0\left(x\right)$ ולהשלים אותו לבסיס של L כך שהמטריצה של $\mathrm{ad}_L x$ ביחס לבסיס זה היא מטריצת בלוקים:

$$\begin{pmatrix}N\left(x\right) & *\\ 0 & A\left(x\right)\end{pmatrix}$$

כאשר $N\left(x\right)$ נילפוטנטית עליונה, $A\left(x\right)$ הפיכה. נעיר כי הגודל של $N\left(x\right)$ הוא $\dim L^0\left(x\right)$. אם כן,

$$\det\left(tI_L-\mathrm{ad}_L x\right)=t^j\det\left(tI_{n-\dim L^0(x)}-A\left(x\right)\right)$$

כאן $a_0\left(x\right)=\cdots=a_{j-1}\left(x\right)=0$, $a_j\left(x\right)\neq0$. אם כן, נקבל כי

$$\mathrm{rank}L=\min_{x\in L}\dim L^0\left(x\right)$$

טענה 1.6 יהי $F \subset K$ שדה הרחבה. אזי

$$\mathrm{rank}_F L = \mathrm{rank}_K L_K$$

הוכחה: נסמן $l = \mathrm{rank}_F L$. נבחר $x \in L$ עבורו $a_l(x) \neq 0$ (בסימונים הקודמים, $\dim_F L^0(x) = l$). נבחר בסיס $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ של L מעל F. אזי $\{v_1 \otimes 1, \ldots, v_n \otimes 1\}$ בסיס של L_K מעל K. מתקיים

$$\mathrm{ad}_{L_K}(x \otimes 1) = \mathrm{ad}_L x \otimes 1$$

ועל כן

$$[\mathrm{ad}_{L_K}(x \otimes 1)]_{\overline{B}} = [\mathrm{ad}_L x]_B$$

מכאן נקבל כי

$$\begin{aligned}\det(tI_{L_K} - \mathrm{ad}_{L_K}(x \otimes 1)) &= \det(tI_L - \mathrm{ad}_L x) = \\ &= t^n + a_{n-1}(x) t^{n-1} + \cdots + a_l(x) t^l\end{aligned}$$

נסיק כי $\mathrm{rank}_K L_K \leq l$. נניח בשלילה כי $\mathrm{rank}_K L_K = l' < l$. לכל $z \in L^K$, נכתוב

$$z = \sum_{i=1}^n s_i \cdot (v_i \otimes 1) = \sum_{i=1}^n (v_i \otimes s_i)$$

לכן

$$[\mathrm{ad}_{L_K} z]_{\overline{B}} = \left[\sum_{i=1}^n s_i \cdot \mathrm{ad}_{L_K}(v_i \otimes 1)\right]_{\overline{B}} = \sum_{i=1}^n s_i [\mathrm{ad}_L v_i]_B$$

זהו צירוף לינארי של המטריצות $[\mathrm{ad}_L v_i]_B \in M_n(F)$ במקדמים $s_1, \ldots, s_n \in K$. לכן,

$$\det\left(tI_n - \sum_{i=1}^n s_i [\mathrm{ad}_L v_i]_B\right) = t^n + b_{n-1}(s_1, \ldots, s_n) t^{n-1} + \cdots + b_{l'}(s_1, \ldots, s_n) t^{l'}$$

כאשר $b_j(s_1, \ldots, s_n)$ הם פולינומים מתוך $F[s_1, \ldots, s_n]$. הנחנו כי $l' < l$, ועל כן $b_{l'}(s_1, \ldots, s_n) = 0$ אם $s_1, \ldots, s_n \in F$ (שכן זה יהיה פולינום אופייני של $\mathrm{ad}_L x$ כלשהו, עבור $x \in L$). נסיק כי בהכרח $b_{l'}(t_1, \ldots, t_n)$ הוא פולינום האפס, כלומר כל מקדמיו אפס - בסתירה לכך שמתקיים $\mathrm{rank}_K L_K = l'$. ■

תזכורת (או אולי השלמה) מאלגברה לינארית: נתון אופרטור לינארי $A : V \to V$, כאשר V מרחב וקטורי ממימד סופי מעל F. נסמן, כמו קודם

$$V^0 = \{v \in V \mid \exists m\, A^m v = 0\}$$

נגדיר

$$V^* = \bigcap_i A^i(v)$$

זו סדרה יורדת אז אין משמעות לאינדקס ההתחלתי. אזי

$$V=V^{0}\oplus V^{*}$$

כמו כן

$$A\left(V^{0}\right)\subset V^{0}$$
$$A\left(V^{*}\right)\subset V^{*}$$

בנוסף, $A\mid_{V^{0}}$ נילפוטנטי, וכן $A\mid_{V^{*}}$ הפיך.

הוכחה: ניזכר במשפט הפירוק הפרימארי עבור A: יהי $m_{A}\left(t\right)$ הפולינום המינימלי של A. נפרק

$$m_{A}\left(t\right)=p_{1}\left(t\right)^{s_{1}}\cdots p_{k}\left(t\right)^{s_{k}}$$

כאשר $p_{i}\left(t\right)\in F\left[t\right]$ פולינומים אי פריקים שונים זה מזה (וכמובן $s_{i}\geq1$). נגדיר

$$U_{i}=\ker\left(P_{i}\left(A\right)^{s_{i}}\right)$$

ברור שמתקיים

$$A\left(U_{i}\right)\subset U_{i}$$

המשפט אומר שמתקיים

$$V=\bigoplus_{i=1}^{k}U_{i}$$

לשם כך נגדיר

$$f_{i}\left(t\right)=\frac{m_{A}\left(t\right)}{p_{i}\left(t\right)^{s_{i}}}$$

אלה פולינומים זרים (אין מחלק משותף לכולם בו זמנית). לכן קיימים פולינומים $g_{i}\left(t\right)\in F\left[t\right]$ עבורם

$$1=\sum_{i=1}^{k}g_{i}\left(t\right)f_{i}\left(t\right)$$

כשנציב A נקבל

$$\mathrm{Id}=\sum_{i=1}^{k}g_{i}\left(A\right)f_{i}\left(A\right)$$

וכשנפעיל על ווקטור v נקבל

$$v=\sum_{i=1}^{k}g_{i}\left(A\right)f_{i}\left(A\right)v$$

כעת, $f_i(A)v \in U_i$, שכן הפעלת $p_i(A)^{s_i}$ תאפס אותו - וכך מקבלים את המשפט. כמו כן

$$m_{A|_{U_i}}(t) = p_i(t)^{s_i}$$

אם הפולינום האופייני

$$c_A(t) = p_1(t)^{r_1} \cdots p_k(t)^{r_k}$$

כאשר כמובן $r_i \geq s_i$, אזי

$$c_{A|_{U_i}}(t) = p_i(t)^{r_i}$$

כאשר F סגור אלגברית נקבל כי p_i הם בהכרח ממעלה ראשונה:

$$p_i(t) = t - \lambda_i$$

אז נקבל כי

$$U_i = \ker\left((A - \lambda_i I)^{s_i}\right) = \left\{v \in V \mid (A - \lambda_i I)^{s_i} v = 0\right\}$$

נטען שזה שווה ממש למרחב V^{λ_i}. הכלה אחת ברורה - נראה את השנייה. יהי $v \in V^{\lambda_i}$. נכתוב

$$v = u_1 + \cdots + u_k$$

ואז נקבל כי

$$(A - \lambda_i I)^s v = \sum_{j=1}^{n} (A - \lambda_i I)^s u_j$$

אם s גדול מספיק זה 0 - וכן, אם s גדול מספיק נוכל להשמיט את המחובר $j = i$ באגף ימין. בגלל שהפירוק שלנו היה לסכום ישר נקבל כי

$$(A - \lambda_i I)^s u_j = 0$$

לכל $j \neq i$ - כלומר $u_j = 0$ לכל $j \neq i$, כי $A - \lambda_i I$ הפיך בצמצום אל U_j לכל $j \neq i$. זה מוכיח את ההכלה שרצינו.

נחזור למקרה של F כללי. נניח כי $V^0 \neq 0$ (אחרת הכל טריוויאלי), ולכן

$$m_A(t) = t^m \cdot p_2(t)^{s_2} \cdots p_k(t)^{s_k}$$

כלומר $t = p_1, m = s_1$. נחזור על מה שעשינו עכשיו ונראה שמתקיים

$$U_1 = V^0$$

נסמן

$$W = \bigoplus_{i=2}^{k} U_i$$

כעת,

$$A^jV = A^jV^0 + A^jW$$

עבור j גדול מספיק המחובר הראשון מתאפס, כלומר

$$A^jV = A^jW = \bigoplus_{i=2}^{k} A^jU_i$$

האופרטור $A\mid_W$ הפיך, כי $\lambda = 0$ לא ערך עצמי שלו (הוצאנו את המרחב העצמי המוכלל של 0). אם כן,

$$V^* = \bigcap_j A^jV = \bigcap_j A^jW = W$$

זה כמובן מוכיח את כל מה שרצינו. ■

הפירוק $V = V^0 \oplus V^*$ נקרא פירוק פיטינג (Fitting) של V ביחס לאופרטור A. אנחנו נתעניין במקרה $A = \mathrm{ad}_L x$, בו $V^0 = L^0(x)$,

$$V^* = \bigcap_j \mathrm{ad}_L^j x(L) =: L^*(x)$$

ואז נוכל לכתוב

$$L = L^0(x) \oplus L^*(x)$$

הגדרה 1.7 $x \in L$ ייקרא גנרי אם $\dim L^0(x) = \mathrm{rank}L$.

אנחנו נראה שאם x גנרי אזי $L^0(x)$ תת אלגברת קרטן.