אלגבראות לי

© ארזים

6 במאי 2019

1 אלגבראות לי פשוטות למחצה

1.1 פירוק ז'ורדן־שבליי

יהי V מרחב ווקטורי ממימד סופי מעל F. ראינו לכל $x \in \mathrm{gl}\left(V\right)$ יש פירוק יחיד

$$x = x_s + x_n$$

כאשר $x_s, x_n \in \mathrm{gl}\left(V\right)$, x_s ניתן ללכסון מעל $\overline{F}$, x_n נילפוטנטי, וכן x_s, x_n מתחלפים. יתר על כן, ניתן לכתוב את x_s, x_n כפולינומים (ללא איבר חופשי) של x במקדמים מתוך $\overline{F}$. זה נקרה פירוק ז'ורדן־שבליי של x. מכאן נובע גם עוד פירוק ז'ורדן־שבליי:

$$\mathrm{ad}_{\mathrm{gl}(V)} x = \mathrm{ad}_{\mathrm{gl}(V)} x_s + \mathrm{ad}_{\mathrm{gl}(V)} x_n$$

משפט 1.1 יהי V מרחב ווקטורי ממימד סופי מעל F. תהי $L \subset \mathrm{gl}\left(V\right)$ אלגברת לי פשוטה למחצה. לכל $x \in L$, אם נכתוב את פירוק ז'ורדן־שבליי של x בתור $x = x_s + x_n$, אזי $x_s, x_n \in L$.

הוכחה: ראשית נבצע רדוקציה למקרה של שדה סגור אלגברית. אם הוכחנו במקרה הזה, נרחיב סקלרים לסגור האלגברי:

$$L_{\overline{F}} = L \otimes_F \overline{F} \subset \mathrm{gl}\left(V_{\overline{F}}\right) = \mathrm{gl}\left(V \otimes_F \overline{F}\right) \cong \mathrm{gl}\left(V\right) \otimes_F \overline{F}$$

ניזכר שאת פירוק ז'ורדן־שבליי קיבלנו מתוך פירוק ז'ורדן של $x \otimes 1$:

$$x \otimes 1 = x_s \otimes 1 + x_n \otimes 1$$

כמובן, $L_{\overline{F}}$ פשוטה למחצה, ולכן מההנחה נקבל כי $x_n \otimes 1, x_s \otimes 1 \in L_{\overline{F}}$, ומכאן כמובן נובע כי $x_s, x_n \in L$. נוכיח כעת במקרה של שדה סגור אלגברית. נתבונן במרחב V במרחב הצגה של L. ממשפט וייל, נוכל לכתוב

$$V = \bigoplus_{i=1}^{k} W_i$$

כאשר $W_i \subset V$ תתי מרחבים אינווריאנטיים ואי פריקים. תהי S קבוצת כל תתי המרחבים של V שאינוורינאנטיים לפעולת L. לכל $W \in S$ נגדיר

$$L_W = \{x \in \mathrm{gl}(V) \mid x(W) \subset W, \mathrm{tr}(x|_W) = 0\}$$

זו בבירור תת אלגברת לי של $\mathrm{gl}(V)$, שמכילה את L, ואכן, L פשוטה למחצה, ולכן $L = [L, L]$, ולכן לכל $x \in L$ מתקיים $\mathrm{tr}(x|_W) = 0$. נתבונן באוסף

$$\mathcal{N}(L) = \{x \in \mathrm{gl}(V) \mid [x, L] \subset L\}$$

ונגדיר

$$\widetilde{L} = \mathcal{N}(L) \cap \left(\bigcap_{W \in S} W \right)$$

נקבל $\widetilde{L} \subset \mathrm{gl}(V)$ תת אלגברת לי המכילה את L. יהי $x \in \widetilde{L}$. נראה כי $x_s, x_n \in \widetilde{L}$. יהי $W \in S$. כיוון שניתן לכתוב את x_s, x_n בתור פולינומים של x במקדמים מתוך F, נקבל $x_s(W), x_n(W) \subset W$. x_n נילפוטנטי, ולכן $\mathrm{tr}(x_n|_W) = 0$, והרי $\mathrm{tr}(x|_W) = 0$, ולכן נובע גם $\mathrm{tr}(x_s|_W) = 0$. נותר להראות כי $x_s, x_n \in \mathcal{N}(L)$. ניזכר כי יש לנו את פירוק ז'ורדן־שבליי הבא:

$$\mathrm{ad}_{\mathrm{gl}(V)} x = \mathrm{ad}_{\mathrm{gl}(V)} x_s + \mathrm{ad}_{\mathrm{gl}(V)} x_n$$

שני המחוברים בצד ימין הם פולינומים בצד שמאל עם מקדמים מתוך F. כיוון מתקיים $\mathrm{ad}_{\mathrm{gl}(V)} x(L) \subset L$, שהרי $x \in \mathcal{N}(L)$, נקבל שגם המחוברים $\mathrm{ad}_{\mathrm{gl}(V)} x_s(L), \mathrm{ad}_{\mathrm{gl}(V)} x_n(L) \subset L$, כלומר $x_s, x_n \in \mathcal{N}(L)$, ובסך הכל הוכחנו כי $x_s, x_n \in \widetilde{L}$ ־ כלומר $\widetilde{L}$ מקיים את המשפט שרצינו. לבסוף, נוכיח כי $L = \widetilde{L}$. בבירור $L \subset \widetilde{L}$ אידאל פשוט למחצה. לפי משפט קודם יש איזשהו אידאל $R \subset \widetilde{L}$ עבורו $\widetilde{L} = L \oplus R$. נרצה להראות כי $R = 0$. יהי $f \in R$. אזי, כיוון שגם $f \in \widetilde{L}$, בפרט, $f \in L_{W_i}$, לכל $1 \leq i \leq k$. לכן $f(W_i) \subset W_i$. נראה כי $f|_{W_i}$ מתחלף עם פעולת L. יהי $x \in L$, אזי

$$x(f(w)) = x(f(w)) - f(x(w)) + f(x(w)) = [x, f](w) + f(x(w)) = f(x(w))$$

איפסנו את $[x, f]$ שכן זהו קומוטטור של איברים מתוך L, R ־ והסכום שלהם ישר. מהלמה של שור, נקבל כי $f|_{W_i} = \lambda_i \mathrm{Id}_{W_i}$, כאשר $\lambda_i \in F$ סקלר כלשהו. כעת, $f \in \widetilde{L}$, ולכן $\mathrm{tr}(f|_{W_i}) = 0$ ־ והרי $\mathrm{tr}(f|_{W_i}) = \dim W_i \cdot \lambda_i$, ולכן נקבל כי בהכרח $\lambda_i = 0$, ומכאן $f = 0$ ־ כלומר $R = 0$ וסיימנו. ■

מסקנה 1.2 בתנאי המשפט, יהי $x \in L \subset \mathrm{gl}(V)$. אזי x ניתן ללכסון מעל $\overline{F}$ (בהתאמה, x נילפוטנטי) אם ורק אם $\mathrm{ad}_L x$, כהעתקה לינארית $L \to L$, ניתן ללכסון מעל $\overline{F}$ (בהתאמה, נילפוטנטי).

הוכחה: מתקיים

$$\mathrm{ad}_{\mathrm{gl}(V)} x = \mathrm{ad}_{\mathrm{gl}(V)} x_s + \mathrm{ad}_{\mathrm{gl}(V)} x_n$$

והרי מתקיים $x_s, x_n \in L$ ולכן $\mathrm{ad}_{\mathrm{gl}(V)} x_s(L), \mathrm{ad}_{\mathrm{gl}(V)} x_n(L) \subset L$. לכן גם $\mathrm{ad}_L x = \mathrm{ad}_L x_s + \mathrm{ad}_L x_n$ פירוק ז'ורדן־שבליי של $\mathrm{ad}_L x$ ־ נשים לב שגם $\mathrm{ad}_L x_s$ ניתן ללכסון מעל

$\overline{F}$, וכמובן $\mathrm{ad}_L x_n$ נילפוטנטי. למעשה הראינו שאם $x = x_s + x_n$ פירוק ז'ורדן־שבליי של $x \in L$ אזי $\mathrm{ad}_L x = \mathrm{ad}_L x_s + \mathrm{ad}_L x_n$ גם פירוק ז'ורדן־שבליי, של $\mathrm{ad}_L x$. בפרט, $\mathrm{ad}_L x = \mathrm{ad}_L x_s \iff x = x_s$ ־ שהרי L פשוטה למחצה, ולכן $Z(L) = 0$, כלומר ad_L חד־חד־ערכית. באותה צורה $\mathrm{ad}_L x = \mathrm{ad}_L x_n \iff x = x_n$. ■

משפט 1.3 תהי L אלגברת לי פשוטה למחצה ממימד סופי מעל F. יהי $x \in L$. התנאים הבאים שקולים:

1. $\mathrm{ad}_L x$ נתן ללכסון מעל $\overline{F}$ (בהתאמה, נילפוטנטי).
2. יש הצגה חד־חד־ערכית π ממימד סופי של L עבורה $\pi(x)$ אופרטור נתן ללכסון מעל $\overline{F}$(בהתאמה, נילפוטנטי).
3. לכל הצגה ממימד סופי σ של L, $\sigma(x)$ אופרטור ניתן ללכסון מעל $\overline{F}$ (בהתאמה, נילפוטנטי).

הוכחה: $3 \Rightarrow 2$: נבחר $\pi = \mathrm{ad}_L$, שהיא חד־חד־ערכית שהרי L פשוטה למחצה.
$2 \Rightarrow 1$: מתקיים

$$\mathrm{ad}_{\pi(L)}\pi(x)(\pi(y)) = [\pi(x), \pi(y)] = \pi([x,y]) = \pi \circ \mathrm{ad}_L x(y)$$

כלומר

$$\mathrm{ad}_{\pi(L)}\pi(x) \circ \pi = \pi \circ \mathrm{ad}_L x$$

כלומר

$$\mathrm{ad}_L x = \pi^{-1}\mathrm{ad}_{\pi(L)}\pi(x)\,\pi$$

כלומר האופרטורים $\mathrm{ad}_L x$, $\mathrm{ad}_{\pi(L)}\pi(x)$ דומים, ולכן אם $\pi(x)$ ניתן לליכסון מעל $\overline{F}$ (נילפוטנטי) אזי לפי המסקנה הקודמת גם $\mathrm{ad}_{\pi(L)}\pi(x)$ ניתן ללכסון מעל $\overline{F}$ (נילפוטנטי), ולכן גם $\mathrm{ad}_L x$ ניתן ללכסון מעל $\overline{F}$ (נילפוטנטי).

נותר לנו $1 \Rightarrow 3$: תהי σ הצגה ממימד סופי של L במרחב V_σ. נסמן $L' = {}^{L}\!/_{\ker\sigma}$. זאת אלגברת לי פשוטה למחצה. נסמן $x' = x + \ker\sigma$. כעת

$$\mathrm{ad}_{L'}x'(y') = [x', y'] = [x,y] + \ker\sigma = \mathrm{ad}_L x(y) + \ker\sigma$$

מכאן גם $\mathrm{ad}_{L'}x'$ ניתן ללכסון (נילפוטנטי) מעל $\overline{F}$. ההצגה σ' של L' המוגדרת

$$\sigma'(y') = \sigma(y)$$

היא חד־חד־ערכית. כמו קודם,

$$\mathrm{ad}_{L'}x' = {\sigma'}^{-1}\mathrm{ad}_{\sigma'(L')}\sigma'(x')\,\sigma'$$

ומכאן נסיק כי $\mathrm{ad}_{\sigma'(L')}\sigma'(x')$ ניתן ללכסון מעל $\overline{F}$ (נילפוטנטי). מהמסקנה הקודמת, נקבל כי $\sigma'(x') \in \mathrm{gl}(V_\sigma)$ אופרטור ניתן ללכסון מעל $\overline{F}$ (נילפוטנטי). מכאן בבירור גם $\sigma(x)$ ניתן ללכסון מעל $\overline{F}$ (נילפוטנטי), שכן לכל $v \in V_\sigma$ מתקיים

$$\sigma'(x')v = \sigma(x)v$$

■

הגדרה 1.4 תהי L אלגברת לי פשוטה למחצה מעל F. יהי $x \in L$ המקיים את התכונות השקולות במשפט. נאמר כי x הוא איבר פשוט למחצה (בהתאמה נילפוטנטי).

משפט 1.5 תהי L אלגברת לי פשוטה למחצה. לכל $x \in L$ יש פירוק יחיד בצורה $x = x_s + x_n$ כאשר $x_s \in L$ איבר פשוט למחצה, $x_n \in L$ איבר נילפוטנטי, וכן $[x_s, x_n] = 0$.

הוכחה: קיום:

$$L \overset{\sim}{\mapsto} \mathrm{ad}_L L \subset \mathrm{gl}\left(L\right)$$

שכן $Z\left(L\right) = 0$, על ידי $x \mapsto \mathrm{ad}_L x$. נכתוב כעת את פירוק ז'ורדן־שבליי:

$$\mathrm{ad}_L x = y_s + y_n$$

כאשר $y_s, y_n \in \mathrm{gl}\left(L\right)$ עם התנאים המתאימים. כעת, $\mathrm{ad}_L\left(L\right)$ אלגברת לי פשוטה למחצה, מוכלת בתוך $\mathrm{gl}\left(L\right)$, אזי $y_s, y_n \in \mathrm{ad}_L L$ לפי המשפט הראשון שראינו היום. יהיו x_s, x_n (היחידים) המקיימים

$$y_s = \mathrm{ad}_L x_s$$
$$y_n = \mathrm{ad}_L x_n$$

(מחד־חד־ערכיות של ad_L). נקבל מכאן כי $x = x_s + x_n$, וכן $[x_s, x_n] = 0$. אם כן, $\mathrm{ad}_L x_s = y_s$ ניתן ללכסון מעל $\overline{F}$, ולכן x_s פשוט למחצה. באותה צורה, x_n נילפוטנטי. נעבור להוכחת היחידות: נניח כי $x = x'_s + x'_n$ פירוק נוסף שכזה. נסיק כי

$$\mathrm{ad}_L x = \mathrm{ad}_L x'_s + \mathrm{ad}_L x'_n$$

פירוק ז'ורדן־שבליי נוסף של $\mathrm{ad}_L x$, ולכן נקבל

$$\mathrm{ad}_L x_s = \mathrm{ad}_L x'_s \Rightarrow x_s = x'_s$$
$$\mathrm{ad}_L x_n = \mathrm{ad}_L x'_n \Rightarrow x_n = x'_n$$

■

1.2 אלגבראות לי רדוקטיביות

משפט 1.6 תהי L אלגברת לי ממימד סופי מעל שדה F. אזי קיימת תת אלגברת לי $M \subset L$ פשוטה למחצה עבורה

$$L = M \oplus \mathrm{Rad}L$$

כסכום ישר של מרחבים ווקטוריים.

הוכחה: בהנתן תת־אלגברת לי $M \subset L$ עבורה $L = M \oplus \mathrm{Rad}L$, אזי $M \cong {}^{L}\!/_{\mathrm{Rad}L}$ כאלגבראות לי (לפי האיזומורפיזם שנובע מהסכום הישר של המרחבים הווקטוריים). מכאן נקבל כי M אוטומטית פשוטה למחצה.

אם $\mathrm{Rad}L = 0$, ניקח $M = L$ וסיימנו. נמשיך באינדוקציה על $\dim_F \mathrm{Rad}L$. נניח ראשית כי יש אידאל $J \subset L$ עבורו $0 \neq J \subsetneq \mathrm{Rad}L$. מתקיים

$$\mathrm{Rad}\left({}^{L}\!/_{J}\right) = {}^{\mathrm{Rad}L}\!/_{J}$$

ולכן מתקיים

$$\dim \mathrm{Rad}\left(L/J\right) < \dim \mathrm{Rad}\left(L\right)$$

ולכן באינדוקציה יש פירוק

$$L/J = N/J \oplus \mathrm{Rad}L/J$$

כאשר $J \subset N \subset L$ אלגברת לי. כמו כן, N/J פשוטה למחצה, כלומר $\mathrm{Rad}\left(N/J\right) = 0$. $J \subset \mathrm{Rad}L$ ולכן פתיר, ועל כן גם $J \subset \mathrm{Rad}N$, ואם כך נקבל

$$\mathrm{Rad}N = J$$

כמו כן, נסיק כי $L = N + \mathrm{Rad}L$, וכן

$$N \cap \mathrm{Rad}L = J$$

כיוון שמתקיים $\dim \mathrm{Rad}N = \dim J < \dim \mathrm{Rad}L$, נקבל באינדוקציה פירוק

$$N = M \oplus \mathrm{Rad}N = M \oplus J$$

נראה כי $L = M \oplus \mathrm{Rad}L$. ראשית,

$$M \cap \mathrm{Rad}L = M \cap N \cap \mathrm{Rad}L = M \cap J = 0$$

אם כן, כעת

$$\begin{aligned} L &= N + \mathrm{Rad}L = \left(M + \mathrm{Rad}N\right) + \mathrm{Rad}L = \\ &= M + \mathrm{Rad}L \end{aligned}$$

המעבר האחרון נכון שכן $\mathrm{Rad}N = J \subset \mathrm{Rad}L$. אם כן, מעתה נניח כי $\mathrm{Rad}L \neq 0$ ולא מכיל אידאלים לא טריביאליים של L. כעת, $Z\left(L\right) \subset \mathrm{Rad}L$, ולכן נוכל להניח כי $Z\left(L\right) = 0$ או $Z\left(L\right) = \mathrm{Rad}L$.

אם $Z\left(L\right) = \mathrm{Rad}L$, נתבונן בהצגה של $L/\mathrm{Rad}L$ במרחב L שנתונה על ידי

$$\pi\left(x + \mathrm{Rad}L\right) = \mathrm{ad}_L x$$

זה מוגדר היטב שכן $\ker \mathrm{ad}_L = Z\left(L\right) = \mathrm{Rad}L$. האלגברה $L/\mathrm{Rad}L$ פשוטה למחצה, ולכן π פריקה לחלוטין (ממשפט וייל), ובפרט למרחב $\mathrm{Rad}L \subset L$ ־ תת מרחב אינווריאנטי להצגה π ־ יש משלים ישר $M \subset L$ אינווריאנטי להצגה π, כלומר $L = M \oplus \mathrm{Rad}L$. מתקיים $\mathrm{ad}_L x\left(M\right) \subset M$ לכל $x \in L$, ועל כן ברור כי M תת אלגברת לי של L, ולכן קיבלנו את הנדרש.

לבסוף, נותר לנו המקרה בו $Z\left(L\right) = 0$. נשים לב כי מתקיים

$$\left[\mathrm{Rad}L, \mathrm{Rad}L\right] \subsetneq \mathrm{Rad}L$$

שכן $\mathrm{Rad}L$ פתיר, ולכן נקבל כי $\left[\mathrm{Rad}L, \mathrm{Rad}L\right] = 0$, בגלל המקרה הראשון שהראינו. נסמן

$$T = \left\{x \in \mathrm{End}_F L \mid x\left(L\right) \subset \mathrm{Rad}L, x\mid_{\mathrm{Rad}L} = \lambda\left(x\right) \cdot \mathrm{Id}_{\mathrm{Rad}L}\right\}$$

נתבונן בהצגה הבאה σ של L במרחב $\mathrm{End}_F L$:

$$\sigma(x)(u) = [\mathrm{ad}_L x, u]$$

נראה כעת כי T תת מרחב אינווריאנטי להצגה σ. יהיו $x \in L, u \in T$. נראה כי $\sigma(x)(u) \in T$. יהי $y \in L$:

$$\begin{aligned} \sigma(x)(u)(y) = [\mathrm{ad}_L x, u](y) = \mathrm{ad}_L x(u(y)) - u(\mathrm{ad}_L x(y)) = \\ = [x, u(y)] - u([x,y]) \in [L, \mathrm{Rad}L] - \mathrm{Rad}L \subset \mathrm{Rad}L \end{aligned}$$

נותר להראות כי $\sigma(x)(u)\mid_{\mathrm{Rad}L} = \lambda \mathrm{Id}_{\mathrm{Rad}L}$. נניח כי $y \in \mathrm{Rad}L$ ונמשיך:

$$\sigma(x)(u)(y) = [x, u(y)] - u([x,y]) = [x, \lambda(u) y] - \lambda(u)[x,y] = 0$$

נגדיר

$$T' \{u \in T \mid u(\mathrm{Rad}L) = 0\}$$

כמובן, $T' \subset T$ תת מרחב, ואפילו ברור כי $\dim T - \dim T' = 1$ (כלומר קו־מימד 1). ראינו כי $\sigma(x)(T) \subset T'$ לכל $x \in L$. נבדוק את $\sigma(\mathrm{Rad}L)$ (על T). לשם כך, יהיו $x \in \mathrm{Rad}L, u \in T, y \in L$ ונקבל:

$$\sigma(x)(u)(y) = [x, u(y)] - u([x,y])$$

כמובן $u(y) \in \mathrm{Rad}L$, ולכן $[x, u(y)] \in [\mathrm{Rad}L, \mathrm{Rad}L] = 0$. כמו כן, $[x,y] \in \mathrm{Rad}L$, ולכן נקבל

$$\sigma(x)(u)(y) = -u([x,y]) = -\lambda(u)[x,y] = -\lambda(u)\,\mathrm{ad}_L x(y)$$

כלומר, כאשר $x \in \mathrm{Rad}L$ נקבל

$$\sigma(x)(u) = -\lambda(u)\,\mathrm{ad}_L x \in \mathrm{ad}_L \mathrm{Rad}L$$

נסמן $P = \mathrm{ad}_L \mathrm{Rad}L$, ונשים לב כי $P \subset T'$: בהינתן $p \in P$, ברור כי $p(L) \subset \mathrm{Rad}L$, כי זה אידאל, וכן $p(\mathrm{Rad}L) \subset [\mathrm{Rad}L, \mathrm{Rad}L] = 0$. אם כן, נתבונן בהצגת המנה של σ,$\overline{\sigma}$, במרחב ${}^{T}/_{P}$. נקבל כי

$$\overline{\sigma}(L)({}^{T}/_{P}) \subset T'$$

והרי $\sigma(\mathrm{Rad}L) \subset P$, ולכן נקבל את ההצגה $\widetilde{\sigma}$ של ${}^{L}/_{\mathrm{Rad}L}$ במרחב ${}^{T}/_{P}$ לפי

$$\widetilde{\sigma}(x + \mathrm{Rad}L)(u + P) = \sigma(x)(u) + P$$

ממשפט וייל, ההצגה $\widetilde{\sigma}$ פריקה לחלוטים (שכן ${}^{L}/_{\mathrm{Rad}L}$ אלגברת לי פשוטה למחצה). כיוון שהמרחב ${}^{T'}/_{P}$ הוא תת מרחב אינווריאנטי של ההצגה $\widetilde{\sigma}$, נוכל למצוא תת מרחב $P \subset T'' \subset T$ המקיים

$$^{T}/_{P} = {}^{T''}/_{P} \oplus {}^{T'}/_{P}$$

ראינו כי $\dim T-\dim T'=1$, ולכן נקבל כי $\dim {}^{T''}/_{P}=1$. יהי $u_0\in T''\backslash P$. אפשר להניח כי $\lambda(u_0)=-1$ (על ידי כפל בסקלר), כלומר $u_0(\mathrm{Rad}L)=-\mathrm{Id}_{\mathrm{Rad}L}$. אם כן,

$$\widetilde{\sigma}(L)\,u_0\in {}^{T''}/_{P}\cap {}^{T'}/_{P}$$

השמאלי בגלל שזה מרחב אינווריאנטי, והימני מהגדרת ההצגה. כמובן, החיתוך הזה הוא 0 ־ ועל כן נקבל, אם נבדוק את ההגדרות, כי

$$\sigma(x)\,u_0\in P$$

לכל $x\in L$. לכן, לכל $x\in L$, יש $\psi(x)\in\mathrm{Rad}L$ כך שמתקיים

$$\sigma(x)\,u_0=\mathrm{ad}_L\psi(x)$$

כמו כן, $\psi(x)$ יחיד בגלל ההנחה שלנו $Z(x)=0$. נקבל העתקה לינארית

$$\psi:L\to\mathrm{Rad}L$$

שהיא חד־חד־ערכית. כאשר $x\in\mathrm{Rad}L$, נקבל

$$\sigma(x)\,u_0=-\lambda(u_0)\,\mathrm{ad}_Lx=\mathrm{ad}_Lx$$

כלומר,

$$\psi(x)=x$$

כעת, נגדיר

$$M=\ker\psi$$

ואז, כמרחבים ווקטוריים נקבל

$$L=\ker\psi\oplus\mathrm{Im}\psi=M\oplus\mathrm{Rad}L$$

נותר רק לבדוק כי M תת אלגברת לי. נוכל לכתוב

$$\begin{aligned}M&=\{x\in L\mid\psi(x)=0\}=\\&=\{x\in L\mid\mathrm{ad}_L\psi(x)=0\}=\\&=\{x\in L\mid\sigma(x)\,u_0=0\}\end{aligned}$$

וזה כבר בבירור סגור ביחס לכפל קומוטטור. ■

הגדרה 1.7 אלגברת לי L ממימד סופי תקרא <u>רדוקטיבית</u> אם $\mathrm{Rad}L=Z(L)$.

משפט 1.8 תהי L אלגברת לי רדוקטיבית. אזי יש תת אלגברת לי $M\subset L$ פשוטה למחצה עבורה $L=M\oplus Z(L)$ (כאלגבראות לי ־ בבירור). כמו כן, $[L,L]=M$, וכן ההצגה ad_L היא פריקה לחלוטין.

להיפך, תהי L אלגברת לי עבורה ההצגה ad_L פריקה לחלוטין. אזי L רדוקטיבית.

הוכחה: נניח כי $\mathrm{Rad}L = Z(L)$ ונכתוב את הפירוק כמו במשפט, $L = M \oplus Z(L)$. כעת,

$$[L,L] = [M,M] = M$$

קומוטטורים של $Z(L)$ עם הכל זה כמובן 0, וכן M פשוטה למחצה, ולכן זה נכון. M פשוטה למחצה, ולכן נוכל לכתוב אותה כך:

$$M = \bigoplus_{r=1}^{k} J_r$$

כאשר $J_r \subset M$ אידאלים פשוטים. האידאלים הללו אינווריאנטיים לקומוטטורים עם M (ובטח שגם עם $Z(L)$ - כל הקומוטטורים מתאפסים) ואם כן נקבל כי J_r הם תת מרחבים אינווריאנטיים ואי פריקים להצגה ad_L. את המרכז נפרק לתתי מרחבים ממימד 1 (לפי בסיס כלשהו שנבחר). תתי מרחבים אלה וודאי אינווריאנטיים ואי פריקים גם כן. אם כן, הראינו כי ad_L פריקה לחלוטין.

בכיוון השני, נניח כי ad_L פריקה לחלוטין. לכן

$$L = \bigoplus_{j=1}^{N} I_j$$

כאשר $I_j \subset L$ אידאלים שאינם 0, שלא מכילים אידאלים חלקיים לא טריוויאליים. נניח כי $I_1, \ldots, I_r$ הם כאלה עבורם

$$[I_j, I_j] \neq 0 \Rightarrow [I_j, I_j] = I_j$$

כלומר אלה לא פתירים. כל השאר מקיימים $[I_j, I_j] = 0$, כלומר בהכרח $\dim I_j = 1$. אם כן, נוכל לכתוב

$$L = \bigoplus_{j=1}^{r} I_j \oplus \bigoplus_{j=r+1}^{N} I_j$$

המחובר הימני חלקי למרכז, כמובן. נחשוב על זה כפירוק לסכום ישר של אלגבראות לי. נקבל

$$\mathrm{Rad}L = \bigoplus_{j=1}^{r} \mathrm{Rad}I_j \oplus \bigoplus_{j=r+1}^{N} \mathrm{Rad}I_j$$

הרדיקלים של האידאלים מהסוג הראשון הם תתי אידאלים, שאינם כל האידאל (שכן האידאלים לא פתירים), ולכן הם 0. הרדיקלים של האידאלים מהסוג השני הם האידאלים עצמם, שכן הם ממימד 1 (ובפרט במרכז). ובסך הכל:

$$\mathrm{Rad}L = \bigoplus_{j=r+1}^{N} I_j \subset Z(L)$$

ההכלה השנייה נכונה תמיד, ובסך הכל נקבל $\mathrm{Rad}L = Z(L)$, כלומר L רדוקטיבית. ■

דוגמאות

1. כל אלגברת לי פשוטה למחצה היא כמובן רדוקטיבית.
2. $\mathrm{gl}_n\left(F\right)$ היא רדוקטיבית. בהינתן $x \in \mathrm{gl}_n F$, נוכל לכתוב

$$x = y + \frac{\mathrm{tr}\left(x\right)}{n}\mathrm{Id}_n$$

נובע כי $\mathrm{tr}\left(y\right) = 0$. אם כן, נוכל לכתוב

$$\mathrm{gl}_n\left(F\right) = \mathrm{sl}_n F \oplus \left\{\lambda I_n \mid \lambda \in F\right\} = \mathrm{sl}_n\left(F\right) \oplus Z\left(\mathrm{gl}_n\left(F\right)\right)$$

כמובן, $\mathrm{sl}_n\left(F\right)$ היא פשוטה למחצה, ועל כן נקבל

$$\mathrm{Rad}\left(\mathrm{gl}_n F\right) = Z\left(\mathrm{gl}_n\left(F\right)\right)$$

הגדרה 1.9 תהי L אלגברת לי ותהי $H \subset L$ תת אלגברת לי. נאמר כי H רדוקטיבית בתוך L אם ההצגה של H שמוגדרת

$$\pi\left(H\right) = \mathrm{ad}_L H$$

במרחב L היא פריקה לחלוטין.