אלגבראות לי

© ארזים

8 באפריל 2019

1 אלגבראות לי פשוטות למחצה

1.1 פירוק אלגברת לי פשוטה למחצה לסכום ישר של אלגבראות לי פשוטות

טענה 1.1 תהי L אלגברת לי ממימד סופי מעל F. יהי $J \subset L$ אידאל, אשר אינו מכיל אידאלים פתירים של L שאינם 0. נסמן $I = J^{\perp}$ - המשלים הניצב של J ביחס לתבנית κ_L.
אזי $L = I \oplus J$ כאלגבראות לי.

הוכחה: כזכור,

$$I = J^{\perp} = \{x \in L \mid \kappa_L(x, J) = 0\}$$

וזהו אידאל של L. כמובן מתקיים

$$\kappa_L\mid_{(I\cap J)\times(I\cap J)} = 0$$

ולכן, מתנאי קרטן, האידאל $I \cap J$ פתיר - ולפי ההנחה על J נקבל $I \cap J = 0$. מכאן נקבל $[J, I] \subset J \cap I = 0$, ולכן $I + J$ הוא סכום ישר (גם כאלגבראות לי). נבחר בסיס $\{u_1, \ldots, u_k\}$ של J, ובסיס $\{v_1, \ldots, v_n\}$ של L. אם כן, נקבל

$$I = J^{\perp} = \left\{\sum_{i=1}^{n} x_i v_i \mid \sum_{i=1}^{n} x_i \kappa_L(v_i, u_j) = 0\right\}$$

התנאי כאן הוא מערכת הומוגנית של משוואות לינאריות. מתקיים

$$n = \dim L = \dim I + \operatorname{rk}\left(\left(\kappa_L(v_i, u_j)\right)_{i\le n, j\le k}\right) \le \dim I + k = \dim I + \dim J = \dim(I \oplus J) \le \dim L = n$$

ולכן נקבל שתמיד יש כאן שוויון - כלומר

$$\dim(I \oplus J) = \dim L$$

ולכן $I \oplus J = L$. ■

טענה 1.2 תהי L אלגברת לי פשוטה למחצה ממימד סופי. יהי $J \subset L$ אידאל.

1. האידאלים J, L/J הם פשוטים למחצה.

2. יהי $I=J^{\perp}$. אזי $L=I\oplus J$ כאלגבראות לי.

הוכחה: J לא מכיל אידאלים פתירים שאינם 0 של L, שכן L פשוטה למחצה. מהטענה הקודמת נקבל כי $L=I\oplus J$. מטענה בסוף השיעור שעבר, L פשוטה למחצה ולכן גם I,J פשוטים למחצה, והרי $I={}^{L}/_{J}$, ולכן סיימנו. ■

משפט 1.3 תהי L אלגברת לי פשוטה למחצה ממימד סופי.

1. $L=[L,L]$.
2. $\mathrm{Der}\left(L\right)=\mathrm{ad}\left(L\right)$, כלומר כל גזירה על L היא גזירה פנימית.

הוכחה:

1. האלגברה ${}^{L}/_{[L,L]}$ היא אלגברת לי קומוטטיבית וגם פשוטה למחצה (על פי הטענה הקודמת). מזה נסיק ${}^{L}/_{[L,L]}=0$, כלומר $L=[L,L]$.
2. נשים לב שמתקיים $L\cong\mathrm{ad}\left(L\right)$ (שכן $Z\left(L\right)=0$). כמובן, $\mathrm{ad}\left(L\right)\subset\mathrm{Der}\left(L\right)$ הוא אידאל, שכן לכל $x\in L,\delta\in\mathrm{Der}\left(L\right)$ מתקיים
$$[\delta,\mathrm{ad}x]=\mathrm{ad}\delta\left(x\right)$$
כמובן, $J=\mathrm{ad}\left(L\right)$ אינו מכיל אידאלים פתירים של $\mathrm{Der}\left(L\right)$ שאינם 0 - כי הוא פשוט למחצה (כמו L). לפי הטענה הראשונה מהשיעור היום, יש אידאל $R\subset\mathrm{Der}\left(L\right)$ עבורו
$$\mathrm{Der}\left(L\right)=J\oplus R$$
נרצה להראות כי $R=0$. ניקח $\delta\in R$. לכל $x\in L$, כמובן $\mathrm{ad}x\in J$ ולכן $[\delta,\mathrm{ad}x]=0$, כלומר $\mathrm{ad}\delta\left(x\right)=0$. אנחנו יודעים שההעתקה $\mathrm{ad}:L\to\mathrm{ad}\left(L\right)$ היא איזומורפיזם, כי המרכז טריוויאלי, ולכן $\delta\left(x\right)=0$ לכל $x\in L$ - כלומר $\delta=0$, ובסך הכל $R=0$. נסיק $\mathrm{Der}\left(L\right)=J=\mathrm{ad}\left(L\right)$.

■

משפט 1.4 תהי L אלגברת לי ממימד סופי. אזי L פשוטה למחצה אם ורק אם L מתפרקת לסכום ישר של אלגבראות לי פשוטות.

הוכחה: נניח כי L סכום ישר של אלגבראות לי פשוטות. די להראות כי אלגברת לי פשוטה היא פשוטה למחצה. תהי L אלגברת לי פשוטה (כלומר $[L,L]\neq 0$, וכן L אינה מכילה אידאלים לא טריוויאלים). כמובן, $\mathrm{Rad}L\subset L$ אידאל ולכן $\mathrm{Rad}L=0$, כלומר L פשוטה למחצה, או $\mathrm{Rad}L=L$, ואז L פתירה, ובפרט $L\subsetneq[L,L]$, כלומר $[L,L]=0$ בסתירה להגדרת L כפשוטה. לכן סיימנו בכיוון זה.

כעת נניח כי L פשוטה למחצה. אם L פשוטה, סיימנו. אחרת, יהי $0\neq J\subsetneq L$ אידאל. יש אידאל I שמקיים $L=I\oplus J$, וכן I,J פשוטים למחצה. באינדוקציה על המימד, I,J מתפרקים לסכום ישר של אלגבראות לי פשוטות, ולכן סיימנו. ■

משפט 1.5 תהי L אלגברת לי פשוטה למחצה ממימד סופי. נפרק

$$L = \bigoplus_{i=1}^{k} L_i$$

כסכום ישר של אלגבראות לי פשוטות. אזי פירוק זה הוא יחיד (עד כדי סדר), וכל אידאל של K הוא מהצורה $\bigoplus L_{i_j}$, כאשר $\{i_j\} \subset \{1, \ldots, k\}$.

הוכחה: יהי $J \subset L$ אידאל. לכל i, האידאל $J \cap L_i \subset L_i$ הוא אידאל של L_i, שהיא פשוטה, ולכן הוא 0 או L_i. נניח לשם פשטות כי $J \cap L_i = L_i$ עבור $1 \leq i \leq s$, וכי $J \cap L_i = 0$ עבור $s + 1 \leq i \leq k$. בפרט, $L_i \subset L$ לכל $1 \leq i \leq s$, ולכן $L_1 \oplus \cdots \oplus L_s \subset J$. לכל $s + 1 \leq i \leq k$ מתקיים $[J, L_i] \subset J \cap L_i = 0$. מכאן נקבל כי

$$J \cap \left(\bigoplus_{i=s+1}^{k} L_i \right) \subset Z \left(\bigoplus_{i=s+1}^{k} L_i \right) = 0$$

כעת, אם $x \in J$, נכתוב $x = a + b$, כאשר

$$a \in \bigoplus_{i=1}^{s} L_i, b \in \bigoplus_{i=s+1}^{k} L_i$$

כמובן, $a \in J$, ומכאן נקבל גם $b \in J$, ועל כן למעשה $b = 0$. מכאן נקבל

$$J = \bigoplus_{i=1}^{s} L_i$$

כעת, אם

$$L = \bigoplus_{j=1}^{r} L'_j$$

כאשר L'_i פשוטה. יהי $1 \leq j \leq r$. כמובן, $L'_j \subset L$ אידאל פשוט. ממה שהראינו קודם הוא סכום ישר של איזשהם L_i, ולכן $L'_j = L_i$ עבור i כלשהו. כן הכיוון השני נכון, ולכן

$$\{L_i\}_{i=1}^{k} = \left\{L'_j\right\}_{j=1}^{r}$$

■

1.2 פריקות לחלוטין של הצגות של אלגבראות לי פשוטות למחצה

משפט 1.6 תהי π הצגה נאמנה (חד־חד־ערכית) ממימד סופי של אלגברת לי פשוטה למחצה L ממימד סופי. תהי b_π התבנית המתאימה להצגה π.

1. b_π לא מנוונת.

2. יהי $B=\{x_1,\dots,x_n\}$ בסיס של L, ויהי $\hat{B}=\{y_1,\dots,y_n\}$ הבסיס של L שדואלי לבסיס B ביחס לתבנית b_π. נתבונן באופרטור

$$c_{\pi,B}=\sum_{i=1}^{n}\pi\left(x_i\right)\pi\left(y_i\right)$$

אזי $c_{\pi,B}$ מתחלף עם $\pi\left(x\right)$ לכל $x\in L$.

3. נניח כי π אי פריקה וגם כי F סגור אלגברית. אזי $c_{\pi,B}$ אינו תלוי בבחירת B ומתקיים

$$c_{\pi,B}=\frac{\dim L}{\dim V_\pi}I_{V_\pi}$$

ומסמנים $c_\pi=c_{\pi,B}$ (אופרטור קזימיר של ההצגה).

הוכחה:

1. נסמן

$$J=\left\{x\in L\mid b_\pi\left(x,L\right)=0\right\}$$

זה הרדיקל של התבנית, שמוגדרת על ידי

$$b_\pi\left(x,y\right)=\operatorname{tr}\left(\pi\left(x\right)\pi\left(y\right)\right)$$

כמובן, $J\subset L$ אידאל, ומתקיים

$$\operatorname{tr}\left(\pi\left(x\right)\pi\left(y\right)\right)=0$$

לכל $x\in J$ ולכל $y\in L$ (ובפרט לכל $y\in J$). לפי משפט קודם שהוכחנו, נובע כי $\pi\left(J\right)$ תת אלגברת לי פתירה של $\mathrm{gl}\left(V_\pi\right)$. כמובן $\pi\left(L\right)\cong L$, כי π חד־חד־ערכית, ולכן $J\subset L$ אידאל פתיר ־ כלומר $J=0$.

2. ניזכר בהגדרת הבסיס הדואלי $\hat{B}$ ־ מתקיים

$$b_\pi\left(x_i,y_j\right)=\delta_{i,j}$$

לכל i,j. כעת,

$$\begin{aligned}
\left[c_{\pi,B},\pi\left(x\right)\right] &= \sum_{i=1}^{n}\left(\pi\left(x_i\right)\pi\left(y_i\right)\pi\left(x\right)-\pi\left(x\right)\pi\left(x_i\right)\pi\left(y_i\right)\right)= \\
&= \sum_{i=1}^{n}\left(\pi\left(x_i\right)\pi\left(y_i\right)\pi\left(x\right)-\left(\pi\left[x,x_i\right]\pi\left(y_i\right)+\pi\left(x_i\right)\pi\left(x\right)\pi\left(y_i\right)\right)\right)= \\
&= \sum_{i=1}^{n}\left(\pi\left(x_i\right)\pi\left[y_i,x\right]-\pi\left[x,x_i\right]\pi\left(y_i\right)\right)= \\
&= -\sum_{i=1}^{n}\left(\pi\left(x_i\right)\pi\left[x,y_i\right]+\pi\left[x,x_i\right]\pi\left(y_i\right)\right)
\end{aligned}$$

כעת נוכל לכתוב

$$[x,x_i]=\sum_{j=1}^{n}a_{i,j}x_j$$
$$[x,y_i]=\sum_{j=1}^{n}b_{i,j}y_j$$

מתקיים:

$$\begin{aligned}a_{i,j}&=b_\pi\left([x,x_i],y_j\right)=-b_\pi\left([x_i,x],y_j\right)=-b_\pi\left(x_i,[x,y_j]\right)=\\&=-b_\pi\left(x_i,\sum_{l=1}^{n}b_{j,l}y_l\right)=-b_{j,i}\end{aligned}$$

כעת נציב כל זאת בחזרה ונקבל

$$\begin{aligned}[c_{\pi,B},\pi(x)]&=-\sum_{i=1}^{n}\left(\pi(x_i)\pi[x,y_i]+\pi[x,x_i]\pi(y_i)\right)=\\&=-\sum_{i=1}^{n}\pi(x_i)\sum_{j=1}^{n}b_{i,j}\pi(y_j)-\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{i,j}\pi(x_j)\pi(y_i)=\\&=\sum_{i,j=1}^{n}a_{j,i}\pi(x_i)\pi(y_j)-\sum_{i,j=1}^{n}a_{i,j}\pi(x_j)\pi(y_i)=0\end{aligned}$$

3. מהלמה של שור נקבל כי $c_{\pi,B}$ הוא אופרטור סקלרי (כי הוא במרכז). כעת,

$$c_{\pi,B}=\lambda I_{V_\pi}$$
$$\mathrm{tr}\left(c_{\pi,B}\right)=\lambda\dim V_\pi$$
$$\mathrm{tr}\left(c_{\pi,B}\right)=\sum_{i=1}^{n}b_\pi\left(x_i,y_i\right)=n$$

כלומר $\lambda=\frac{n}{\dim V_\pi}$.

■

דוגמא ההצגה של $\mathrm{sl}_n(\mathbb{C})$ במרחב $\mathbb{C}^n$. לכל $x\in\mathrm{sl}_n(\mathbb{C})$ נקבל

$$\pi(x)v=x\cdot v$$

זו הצגה אי פריקה. כעת,

$$b_\pi(x,y)=\mathrm{tr}(xy)$$
$$c_\pi=\frac{n^2-1}{n}I_{\mathbb{C}^n}$$

משפט 1.7 תהי L אלגברת לי פשוטה למחצה ממימד סופי. תהי π הצגה ממימד סופי של L. תהי $f:L\to V$ העתקה לינארית מעל F. התכונות הבאות שקולות:

1. לכל $x,y\in L$ מתקיים

$$f\left[x,y\right]=\pi\left(x\right)f\left(y\right)-\pi\left(y\right)f\left(x\right)$$

2. קיים $v\in V$ עבורו

$$f\left(x\right)=\pi\left(x\right)v$$

הוכחה: בכיוון $1\Leftarrow 2$ קל לבדוק שזה מתקיים:

$$\begin{aligned}f\left[x,y\right]&=\pi\left[x,y\right]v=\pi\left(x\right)\left(\pi\left(y\right)v\right)-\pi\left(y\right)\left(\pi\left(x\right)v\right)=\\&=\pi\left(x\right)f\left(y\right)-\pi\left(y\right)f\left(x\right)\end{aligned}$$

כמו שרצינו. בכיוון השני, נתחיל ברדוקציה לשדה סגור אלגברית. יהי $\overline{F}$ הסגור האלגברי של F, ונתבונן במרחב הרחבת הסקלרים

$$\begin{aligned}V_{\overline{F}}&=V\otimes_F\overline{F}\\L_{\overline{F}}&=L\otimes_F\overline{F}\\\pi_{\overline{F}}\left(x\otimes\lambda\right)&=\pi\left(x\right)\otimes\lambda\\f_{\overline{F}}&:L_{\overline{F}}\to V_{\overline{F}}\\f_{\overline{F}}\left(x\otimes\lambda\right)&=f\left(x\right)\otimes\lambda\end{aligned}$$

כעת,

$$\begin{aligned}f_{\overline{F}}\left[x\otimes\lambda,y\otimes\mu\right]&=f_{\overline{F}}\left(\left[x,y\right]\otimes\lambda\mu\right)=f\left[x,y\right]\otimes\lambda\mu=\\&=\left(\pi\left(x\right)f\left(y\right)-\pi\left(y\right)f\left(x\right)\right)\otimes\lambda\mu=\\&=\left(\pi\left(x\right)\otimes\lambda\right)\left(f\left(y\right)\otimes\mu\right)-\left(\pi\left(y\right)\otimes\mu\right)\left(f\left(x\right)\otimes\lambda\right)=\\&=\pi_{\overline{F}}\left(x\otimes\lambda\right)f_{\overline{F}}\left(y\otimes\mu\right)-\pi_{\overline{F}}\left(y\otimes\mu\right)f_{\overline{F}}\left(x\otimes\lambda\right)\end{aligned}$$

ולכן, אם הוכחנו את הטענה מעל $\overline{F}$, אז יש $v_{\overline{F}}\in V_{\overline{F}}$ כך שלכל $x\in L$ מתקיים

$$f_{\overline{F}}\left(x\otimes1\right)=\pi_{\overline{F}}\left(x\otimes1\right)\left(v_{\overline{F}}\right)$$

כלומר

$$f\left(x\right)\otimes1=\left(\pi\left(x\right)\otimes1\right)\left(v_{\overline{F}}\right)$$

נבחר בסיס $\left\{\mu_j\right\}_{j\in I}$ של $\overline{F}$ מעל F. כך שמתקיים $\mu_{j_0}=1$ עבור j_0 כלשהו. נכתוב

$$v_{\overline{F}}=\sum_{j\in I}v_j\otimes\mu_j$$

עבור $v_j \in V$. מכאן

$$f(x) \otimes 1 = \sum_{j \in I} \pi(x) v_j \otimes \mu_j$$

ולכן

$$f(x) = \pi(x) v_{j_0}$$

כל שנותר לנו הוא להוכיח עבור המקרה בו F סגור אלגברית. ראשית, נניח כי π אי פריקה ונאמנה. ראינו כי b_π לא מנוונת. נבחר בסיס $\{x_1, \ldots, x_n\}$ של L וניקח את הבסיס הדואלי לו $\{y_1, \ldots, y_n\}$ ביחס לתבנית b_π. יהי

$$\lambda = \frac{\dim L}{\dim V}$$

הסקלר של אופרטור קזימיר. נגדיר את הווקטור

$$v = \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^{n} \pi(x_i) f(y_i)$$

ונראה כי

$$f(x) = \pi(x) v$$

נתבונן בהפרש

$$\lambda(\pi(x) v - f(x)) = \sum_{i=1}^{n} \pi(x) \pi(x_i) f(y_i) - \lambda f(x)$$

ראינו כי

$$\sum_{i=1}^{n} \pi(x_i) \pi(y_i) = c_\pi = \lambda I_{V_\pi}$$

כלומר נקבל (הסימונים $a_{i,j}, b_{i,j}$ זהים לאלה שהשתמשנו בהם בטענה על אופרטור קזימיר):

$$\begin{aligned}
\lambda(\pi(x) v - f(x)) &= \sum_{i=1}^{n} \pi(x) \pi(x_i) f(y_i) - \lambda f(x) = \\
&= \sum_{i=1}^{n} \pi(x) \pi(x_i) f(y_i) - \sum_{i=1}^{n} \pi(x_i) \pi(y_i) f(x) = \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left(\pi[x, x_i] f(y_i) + \pi(x_i) \pi(x) f(y_i) - \pi(x_i) \pi(y_i) f(x)\right) = \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left(\pi[x, x_i] f(y_i) + \pi(x_i) \left(\pi(x) f(y_i) - \pi(y_i) f(x)\right)\right) = \\
&= \sum_{i=1}^{n} \pi[x, x_i] f(y_i) + \sum_{i=1}^{n} \pi(x_i) f[x, y_i] = \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{i,i} \pi(x_j) f(y_i) - \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{j,i} \pi(x_i) f(y_j) = 0
\end{aligned}$$

כמובן, $\lambda \neq 0$, ולכן נקבל כי $\pi\left(x\right)v = f\left(x\right)$. כעת, נוותר על הנחת הנאמנות ־ כלומר π אי־פריקה. נסמן $J = \ker\pi$. זהו אידאל של L, ולכן יש לו משלים ישר, $L = I \oplus J$. הצמצום $\pi\mid_I$ היא אי פריקה ונאמנה של I במרחב V. נראה כי $f\left(J\right) = 0$. יהיו $x, y \in J$, אזי

$$f\left[x,y\right] = \pi\left(x\right)f\left(y\right) - \pi\left(y\right)f\left(x\right) = 0 - 0 = 0$$

אם כן, $f\left[J,J\right] = 0$. J פשוט למחצה, ולכן $J = \left[J,J\right]$, כלומר $f\left(J\right) = 0$. ממה שראינו עכשיו, נקבל שקיים $v \in V$ עבורו $f\left(x\right) = \pi\left(x\right)v$ לכל $x \in I$. יהי $x \in L$. נכתוב $x = a+b$, $a \in I, b \in J$. נקבל

$$f\left(x\right) = f\left(a\right) = \pi\left(a\right)v = \pi\left(a+b\right)v = \pi\left(x\right)v$$

לבסוף, נוותר גם על הנחת האי פריקות ־ כלומר π הצגה פריקה. ניקח $0 \neq W \subsetneq V$ תת מרחב אינווריאנטי. נתבונן בהצגת המנה $\overline{\pi}$ של L במרחב ${}^{L}/_{W}$. נסמן $\varphi : V \to {}^{V}/_{W}$ את העתקת המנה הקנונית, ונגדיר

$$\begin{aligned}\overline{f} &= \varphi \circ f\\ \overline{f}\left(x\right) &= f\left(x\right) + W\end{aligned}$$

מתקיים

$$\begin{aligned}\overline{f}\left[x,y\right] = f\left[x,y\right] + W &= \pi\left(x\right)f\left(y\right) - \pi\left(y\right)f\left(x\right) + W\\ &= \overline{\pi}\left(x\right)\left(f\left(y\right)+W\right) - \overline{\pi}\left(y\right)\left(f\left(x\right)+W\right) =\\ &= \overline{\pi}\left(x\right)\overline{f}\left(y\right) - \overline{\pi}\left(y\right)\overline{f}\left(x\right)\end{aligned}$$

באינדוקציה על המימד, יש ווקטור $v \in V$ עבורו $\overline{f}\left(x\right) = \overline{\pi}\left(x\right)\left(v+W\right)$ לכל $x \in L$. נסמן כעת

$$f'\left(x\right) = f\left(x\right) - \pi\left(x\right)v \in W$$

עבור $x \in L$. כעת,

$$\begin{aligned}f'\left[x,y\right] &= f\left[x,y\right] - \pi\left[x,y\right]v =\\ &= \pi\left(x\right)f\left(y\right) - \pi\left(y\right)f\left(x\right) - \pi\left(x\right)\pi\left(y\right)v + \pi\left(y\right)\pi\left(x\right)v =\\ &= \pi\left(x\right)\left(f\left(y\right) - \pi\left(y\right)v\right) - \pi\left(y\right)\left(f\left(x\right) - \pi\left(x\right)v\right) =\\ &= \pi\left(x\right)f'\left(y\right) - \pi\left(y\right)f'\left(x\right)\end{aligned}$$

לכן f' מקיימת את התכונה הנדרשת כלפי ההצגה $\pi\mid_W$ (שכן $f' : L \to W$, ולכן בשוויון האחרון נוכל להחליף את π עם הצמצום $\pi\mid_W$). אם כן, באינדוקציה על המימד, נקבל ווקטור $w \in W$ עבורו

$$f'\left(x\right) = \pi\left(x\right)w$$

נקבל

$$\begin{aligned}f\left(x\right) - \pi\left(x\right)v &= \pi\left(x\right)w\\ f\left(x\right) &= \pi\left(x\right)\left(v+w\right)\end{aligned}$$

ולכן הווקטור $v+w$ מוכיח את המשפט שלנו. ■

משפט 1.8 (וייל Weyl) תהי L אלגברת לי פשוטה למחצה ממימד סופי. אז כל הצגה ממימד סופי של Lהיא פריקה לחלוטין.

הוכחה: תהי π הצגה של L במרחב V (ממימד סופי מעל F). יהי $U \subset V$ תת מרחב אינווריאנטי. נוכיח כי יש לו משלים ישר אינווריאנטי. יהי $\varphi : V \to {}^{V}/_{U}$ הומומורפיזם המנה. נראה שיש $\xi : {}^{V}/_{U} \to V$ הומומורפיזם של <u>מודולים מעל L</u> עבורו

$$\varphi \circ \xi = \mathrm{id}_{V/U}$$

לאחר מכן נסמן $W = \xi\left({}^{V}/_{U}\right)$ - נקבל $U \cap W = 0$, כי אם $u \in U \cap W$ אזי $u = \xi\left(v + U\right)$, $0 = \varphi\left(u\right) = v + U$ ולכן $v \in U$, כלומר $u = \xi\left(v + U\right) = 0$. לכן $U + W$ סכום ישר, וכן

$$\dim\left(U + W\right) = \dim U + \dim W = \dim U + \dim {}^{V}/_{U} = \dim V$$

כאשר השתמשנו במעבר הלפני אחרון בכך שבהכרח ξ חד־חד־ערכית. אם כן, נותר לנו למצוא את ξ. ניזכר במרחב

$$\mathcal{V} = \mathrm{Hom}_F\left({}^{V}/_{U}, V\right)$$

ראינו כי על $\mathcal{V}$ יש מבנה של מודול מעל L לפי ההצגה

$$\lambda\left(x\right)\left(T\right)\left(\overline{v}\right) = \pi\left(x\right)\left(T\left(\overline{v}\right)\right) - T\left(\overline{\pi}\left(x\right)\left(\overline{v}\right)\right)$$

תהי $T_0 \in \mathcal{V}$ העתקה לינארית עבורה $\varphi \circ T_0 = \mathrm{id}_{V/U}$. נגדיר כעת

$$f\left(x\right) = \lambda\left(x\right)\left(T_0\right)$$

כמובן $f : L \to \mathcal{V}$ העתקה לינארית. נראה כי לכל $x \in L$ מתקיים $\varphi \circ f\left(x\right) = 0$.

$$\begin{aligned}\varphi\left(f\left(x\right)\left(\overline{v}\right)\right) &= \varphi\left(\lambda\left(x\right)\left(T_0\right)\left(\overline{v}\right)\right) = \\ &= \varphi\left(\pi\left(x\right)\left(T_0\left(\overline{v}\right)\right) - T_0\left(\overline{\pi}\left(x\right)\left(\overline{v}\right)\right)\right) = \\ &= \overline{\pi}\left(x\right)\left(\varphi\left(T_0\left(\overline{v}\right)\right)\right) - \varphi\left(T_0\left(\overline{\pi}\left(x\right)\left(\overline{v}\right)\right)\right) = \\ &= \overline{\pi}\left(x\right)\left(\overline{v}\right) - \overline{\pi}\left(x\right)\left(\overline{v}\right) = 0\end{aligned}$$

נסמן כעת $\mathcal{V}' = \mathrm{Hom}_F\left({}^{V}/_{U}, U\right)$. הראינו כי $f\left(x\right) \in \mathcal{V}'$ לכל $x \in L$. כעת, $\mathcal{V}' \subset \mathcal{V}$ הוא תת מרחב אינווריאנטי להצגה λ. נסמן f' את ההעתקה הלינארית

$$\begin{aligned}f' &: L \to \mathcal{V}' \\ f'\left(x\right) &= f\left(x\right)\end{aligned}$$

לכל $x \in L$. כעת, f' מקיימת את התכונה בסעיף 1 במשפט הקודם ביחס להצגה $\mu\left(x\right) = \lambda\left(x\right)|_{\mathcal{V}'}$, שכן

$$\begin{aligned}f'\left[x, y\right] &= \mu\left[x, y\right]\left(T_0\right) = \lambda\left[x, y\right]T_0 = \\ &= \lambda\left(x\right)\lambda\left(y\right)T_0 - \lambda\left(y\right)\lambda\left(x\right)T_0 = \\ &= \mu\left(x\right)f'\left(y\right) - \mu\left(y\right)f'\left(x\right)\end{aligned}$$

מהמשפט הקודם, ישנו $T_0' \in \mathcal{V}'$ עבורו

$$f'\left(x\right) = \mu\left(x\right)T_0'$$

לכל $x\in L$. נחשוב על T_0' כהעתקה לינארית לתוך V (במקום לתוך U ־ זה מרחב גדול יותר אז זה לא משנה), וא

$$0=f\left(x\right)-f\left(x\right)=f\left(x\right)-f'\left(x\right)=\lambda\left(x\right)\left(T_0\right)-\mu\left(x\right)\left(T_0'\right)=$$
$$=\lambda\left(x\right)\left(T_0\right)-\lambda\left(x\right)\left(T_0'\right)=\lambda\left(x\right)\left(T_0-T_0'\right)$$

נסמן $\xi=T_0-T_0'$. כעת,

$$\xi:{}^{V}/_{U}\to V$$
$$\lambda\left(x\right)\left(\xi\right)=0$$

כעת,

$$0=\lambda\left(x\right)\left(\xi\right)\left(\overline{v}\right)=\pi\left(x\right)\left(\xi\left(\overline{v}\right)\right)-\xi\left(\overline{\pi}\left(x\right)\overline{v}\right)$$

כלומר נקבל

$$\pi\left(x\right)\left(\xi\left(\overline{v}\right)\right)=\xi\left(\overline{\pi}\left(x\right)\overline{v}\right)$$

ולכן $\xi:{}^{V}/_{U}\to V$ הומומורפיזם של מודולים מעל L. נקבל לבסוף

$$\varphi\circ\xi=\varphi\circ T_0-\varphi\circ T_0'=\varphi\circ T_0=\mathrm{id}_{V/U}$$

כאשר בדרך איפסנו את $\varphi\circ T_0'$ שכן $\mathrm{Im}T_0'\subset U$. ■

1.3 פירוק ז'ורדן־שבליי (Jordan-Chevalley) באלגבראות לי פשוטות למחצה.

יהי V מרחב וקטורי ממימד סופי מעל F, ויהי $x\in\mathrm{End}_FV$. יהי $m_x\left(t\right)\in F\left[t\right]$ הפולינום המינימלי של x. יהי K שדה פיצול של $m_x\left(t\right)$. אפשר לכתוב את פירוק ז'ורדן של x מעל K.

$$V_K=V\otimes_F K$$
$$L_K=L\otimes_F K$$
$$\mathrm{End}_KV_K=\mathrm{End}_FV\otimes K\cong K^{\dim_F V}$$

כאשר $x\otimes\lambda$ זו העתקה לינארית $V_K\to V_K$ מעל K הממפה

$$v\otimes\mu\mapsto x\left(v\right)\otimes\lambda\mu$$

אם B בסיס של V מעל F, אזי $B\otimes1$ בסיס של V_K מעל K. כעת,

$$\left[x\otimes\lambda\right]_{B\otimes1}=\lambda\left[x\right]_B$$
$$\left[v\otimes\lambda\right]_{B\otimes1}=\lambda\left[v\right]_B$$

אם כן, יש משמעות לפירוק

$$x\otimes1=x_s'+x_n'$$

שהוא פירוק ז'ורדן של x מעל K ־ שני המחוברים איברים של $\mathrm{End}_K V_K$. ניקח אוטומורפיזם $\sigma \in \mathrm{Gal}\left({}^{K}\!/\!{}_{F}\right)$, ונקבל

$$x \otimes 1 = \sigma\left(x \otimes 1\right) = \sigma\left(x_s'\right) + \sigma\left(x_n'\right)$$

נקבל כאן פירוק ז'ורדן נוסף של $x \otimes 1$. מהיחידות של פירוק ז'ורדן נסיק

$$\begin{aligned} \sigma\left(x_s'\right) &= x_s' \\ \sigma\left(x_n'\right) &= x_n' \end{aligned}$$

אם כן, כל הקואורדינטות של המחוברים בשדה השבת של חבורת גלואה ־ כלומר בתוך F.
אם כן, נכתוב

$$\begin{aligned} x_s' &= x_s \otimes 1 \\ x_n' &= x_n \otimes 1 \end{aligned}$$

ונקבל

$$x = x_s + x_n$$

פירוק "ז'ורדן" ־ x_s ניתן ללכסון מעל K, ולא מעל F. זה ייקרא פירוק ז'ורדן־שבליי. הוא יחיד, ואפילו ניתן לכתוב את המחוברים כפולינומים של x ־ אבל עם מקדמים בשדה K.