אלגבראות לי

ⓒ ארזים

29 באפריל 2019

1 נילפוטנטיות ופתירות באלגבראות לי

ניזכר במשפט שראינו בפעם הקודמת ועוד לא הוכחנו:

משפט 1.1 יהי V מרחב ווקטורי ממימד סופי מעל שדה F (שהמציין שלו 0). תהי $L \subseteq \mathrm{gl}\left(V\right)$ תת אלגברת לי. נניח כי $\mathrm{tr}\left(xy\right)=0$ לכל $x,y\in L$. אזי כל איברי $\left[L,L\right]$ הם נילפוטנטיים (כהעתקות לינאריות).

הוכחה: ראשית נניח כי F סגור אלגברית. יהי $x\in\left[L,L\right]$, ונכתוב

$$x=\sum_{i=1}^{k}\left[a_i,b_i\right]$$

כאשר $a_i,b_i\in L$. נכתוב את פירוק ז'ורדן של x כהעתקה לינארית (שהרי השדה סגור אלגברית) - $x=x_s+x_n$. האופרטור x_s ניתן ללכסון, אז נבחר בסיס B של V שמורכב מווקטורים עצמיים של x_s - כלומר

$$\left[x_s\right]_B=\mathrm{diag}\left(\lambda_1,\ldots,\lambda_n\right)$$

מטרתנו היא להראות כי $x_s=0$. לשם כך, נראה כי $\lambda_i=0$ לכל i. נגדיר את המרחב הבא:

$$E=\mathrm{Span}_{\mathbb{Q}}\left(\lambda_1,\ldots,\lambda_n\right)$$

נתבונן במרחב הדואלי $E^*=\mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}\left(E,\mathbb{Q}\right)$ שכן אז נקבל $E=0$, כלומר $\lambda_i=0$ לכל i. יהי $f\in E^*$. יש $y_f\in\mathrm{gl}\left(V\right)$ (יחידה) המקיימת

$$\left[y_f\right]_B=\mathrm{diag}\left(f\left(\lambda_1\right),\ldots,f\left(\lambda_n\right)\right)$$

כעת, y_f הוא פולינום במטריצה x_s, כי נמצא פולינומים $p\left(t\right)\in F\left[t\right]$ עבורו $p\left(\lambda_i\right)=f\left(\lambda_i\right)$, ואז

$$\left[p\left(x_s\right)\right]_B=\mathrm{diag}\left(p\left(\lambda_1\right),\ldots,p\left(\lambda_n\right)\right)=\left[y_f\right]_B$$

ולכן $y_f=p\left(x_s\right)$. כעת

$$y_fx_n=p\left(x_s\right)x_n=x_np\left(x_s\right)=x_ny_f$$

נסיק כי $y_f x_n$ נילפוטנטית ולכן $\mathrm{tr}\left(y_f x_n\right)=0$. כעת,

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}\left(y_f x\right)&=\mathrm{tr}\left(y_f x_s\right)+\mathrm{tr}\left(y_f x_n\right)=\mathrm{tr}\left(y_f x_s\right)=\mathrm{tr}\left(\left[y_f\right]_B\left[x_s\right]_B\right)=\\&=\sum_{i=1}^{r}\lambda_i f\left(\lambda_i\right)\end{aligned}$$

כמו כן, נקבל

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}\left(y_f,x\right)&=\sum_{i=1}^{k}\mathrm{tr}\left(y_f,\left[a_i,b_i\right]\right)=\\&=\sum_{i=1}^{k}\mathrm{tr}\left(\left[y,a_i\right]\cdot b_i\right)=\sum_{i=1}^{k}\mathrm{tr}\left(\mathrm{ad}_{y_f}\left(a_i\right)b_i\right)\end{aligned}$$

נראה כעת כי $\mathrm{ad}y_f$ פולינום בערך $\mathrm{ad}x_s$. לשם כך - נעבור לקורדינטות במרחב V לפי הבסיס B, והתאם נעבור לקואורדינטות במרחב $\mathrm{gl}\left(V\right)$ באמצעות $[\cdot]_B$. כעת,

$$\begin{aligned}&\mathrm{ad}\left[y_f\right]_B e_{i,j}=\left(f\left(\lambda_i\right)-f\left(\lambda_j\right)\right)e_{i,j}=f\left(\lambda_i-\lambda_j\right)e_{i,j}\\&\mathrm{ad}\left[x_s\right]_B e_{i,j}=\left(\lambda_i-\lambda_j\right)e_{i,j}\end{aligned}$$

נמצא כעת פולינום $\tilde{p}\left(t\right)\in F\left[t\right]$ עבורו

$$\tilde{p}\left(\lambda_i-\lambda_j\right)=f\left(\lambda_i-\lambda_j\right)$$

ואז ינבע כי מתקיים

$$\tilde{p}\left(\mathrm{ad}x_s\right)=\mathrm{ad}y_f$$

כזכור, $\mathrm{ad}x_s+\mathrm{ad}x_n$ הוא פירוק ז'ורדן של $\mathrm{ad}x$. כמו כן, אנו יודעים כי $\mathrm{ad}x_s$ פולינום בערך $\mathrm{ad}x$. מכאן, $\mathrm{ad}y_f$ פולינום בערך $\mathrm{ad}x$. נסיק כי

$$\left[y_f,a_i\right]=\mathrm{ad}y_f\left(a_i\right)\in L$$

כאשר

$$\mathrm{ad}y_f=\sum_{j=0}^{R}\alpha_j\mathrm{ad}^j x$$

מכאן, לפי ההנחה במשפט, נקבל

$$\mathrm{tr}\left(\left[y_f,a_i\right]\cdot b_i\right)=0$$

ועל כן לכל $f\in E^*$ מתקיים

$$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i f\left(\lambda_i\right)=0$$

נפעיל שוב את f ונקבל

$$\sum_{i=1}^{n}\left(f\left(\lambda_i\right)\right)^2=0$$

והרי $f\left(\lambda_i\right)\in\mathbb{Q}$, לכן נובע כי $f\left(\lambda_i\right)=0$ לכל $f\in E^*$. זה מראה $E^*=0$ ולכן $E=0$, כלומר $x_s=0$, ואז $x=x_n$ נילפוטנטי.

לשדה כללי F ניקח הרחבות סקלרים לסגור האלגברי $\overline{F}$:

$$\begin{aligned}\overline{L}&=L\otimes_F\overline{F}\\ \overline{V}&=V\otimes_F\overline{F}\end{aligned}$$

ניזכר שאם $\{v_1,\ldots,v_n\}$ בסיס של V מעל F אזי $\{v_1\otimes 1,\ldots,v_n\otimes 1\}$ בסיס של $\overline{V}$ מעל $\overline{F}$. יש לנו גם איזומורפיזם מאוד ברור:

$$\mathrm{gl}\left(V\right)\otimes_F\overline{F}\cong\mathrm{gl}\left(\overline{V}\right)$$

שמתאים כך:

$$\begin{aligned}\left(a_{i,j}\right)_{i,j=1}^{n}\otimes\overline{F}\ni\sum_{k=1}^{r}\left(\sum_{i,j=1}^{n}a_{i,j}^{(k)}e_{i,j}\otimes t_k\right)&=\\ =\sum_{i,j=1}^{n}e_{i,j}\otimes\sum_{k=1}^{r}e_{i,j}^{(k)}t_k&=\\ =\sum_{i,j=1}^{n}e_{i,j}\otimes\alpha_{i,j}&\end{aligned}$$

ולכן נוכל לחשב עקבות בשני הצדדים ולקבל דברים נכונים -

$$\mathrm{tr}\left(\left(x\otimes t\right)\left(y\otimes t'\right)\right)=tt'\mathrm{tr}\left(x,y\right)=0$$

כאשר העקבה האחרונה שווה 0 בגלל ההנחה במשפט. כעת, $\overline{L}\subset\mathrm{gl}\left(\overline{V}\right)$, וראינו כי $\mathrm{tr}\left(\overline{x},\overline{y}\right)=0$ לכל $\overline{x},\overline{y}\in\overline{L}$ - כלומר, ממה שראינו לשדה סגור אלגברית, איברי $\left[\overline{L},\overline{L}\right]$ נילפוטנטיים - והרי

$$\left[L,L\right]\otimes 1\subset\left[\overline{L},\overline{L}\right]$$

ולכן גם איברי $\left[L,L\right]$ נילפוטנטיים, וסיימנו. ■

מסקנה 1.2 בתנאי המשפט שהוכחנו, $\left[L,L\right]$ נילפוטנטי (כאלגברת לי), ולכן L פתירה.

הוכחה: ראינו עכשיו שכל איברי $\left[L,L\right]$ נילפוטנטיים. נתבונן בהצגה $\pi=\mathrm{id}$ של $\left[L,L\right]$ במרחב V. נקבל שלכל $x\in\left[L,L\right]$, האיבר $\pi\left(x\right)$ נילפוטנטי, ולכן נקבל כי $\left[L,L\right]$ אלגברת לי נילפוטנטית לפי משפט שראינו בשבוע שעבר (ואפילו קיים בסיס של V שישלש את $\pi\left(\left[L,L\right]\right)$ סימולטנית). ■

מסקנה 1.3 תהי L אלגברת לי ממימד סופי מעל שדה F. נניח לכל $x,y\in[L,L]$ מתקיים $\kappa_L(x,y)=0$. אזי L פתירה.

הוכחה: נתון לנו כי לכל $x,y\in[L,L]$ מתקיים

$$\kappa_L(x,y)=\mathrm{tr}(\mathrm{ad}_L x,\mathrm{ad}_L y)=0$$

נשתמש במשפט הקודם כאשר $V=L$, ותת אלגברת לי של $\mathrm{gl}(V)$ שניקח היא $\mathrm{ad}[L,L]$. מהמשפט, נקבל שהאלגברה $\mathrm{ad}_L([[L,L],[L,L]])=\mathrm{ad}_L\left(\left[L^{(1)},L^{(1)}\right]\right)=\mathrm{ad}_L\left(L^{(2)}\right)$ נילפוטנטית. בפרט, $\mathrm{ad}_{L^{(2)}}\left(L^{(2)}\right)$ נילפוטנטי - וממשפט אנגל נקבל כי $L^{(2)}$ נילפוטנטית, ולכן פתירה - ולכן כמובן שגם L פתירה (שכן $\left(L^{(2)}\right)^{(k)}=L^{(2+k)}$). ■

בסיכום מה שעשינו היום עם מעט שעשינו בפעם הקודמת נקבל:

משפט 1.4 (קרטן Cartan) תהי L אלגברת לי ממימד סופי. אזי L פתירה אם ורק אם תבנית קילינג של L היא זהותית אפס על $[L,L]\times[L,L]$.

2 אלגבראות לי פשוטות למחצה

2.1 האידאל הנילפוטנטי הגדול ביותר

טענה 2.1 תהי π הצגה אי פריקה ממימד סופי של אלגברת לי L במרחב V. יהי $J\subset L$ אידאל כך שכל איברי $\pi(J)$ נילפוטנטים. אזי $\pi(J)=0$, כלומר $J\subset\ker\pi$.

הוכחה: אם $J=0$ אין מה להוכיח. אחרת, נתבונן בתת המרחב

$$W=\{v\in V\mid \pi(J)v=0\}$$

נטען שמתקיים $W\neq 0$. אם נתבונן בהצגה $\pi'=\pi\mid_J$ של J במרחב V, נקבל שלכל $x\in J$ האיבר $\pi'(x)$ נילפוטנטי - לכן לפי משפט שהוכחנו בשבוע שעבר נקבל שילוש סימולטני של $\pi'(J)$ למטריצות נילפונטיות - בפרט יש ווקטור עצמי משותף לכל $\pi(J)$ עם ערך עצמי 0, ולכן $W\neq 0$. כמובן, המרחב $W\subset V$ הוא תת מרחב אינווריאנטי (גם את זה ראינו - שהרי $W=V_\lambda$ עבור הפונקציונל $\lambda:v\mapsto 0$). הנחנו כי π אי פריקה, ולכן נקבל $W=V$ - כלומר $\pi(J)=0$. ■

טענה 2.2 תהי π הצגה ממימד סופי של אלגברת לי L במרחב V. נתבונן במרחב V כמודול מעל L, וניקח לו סדרת הרכב:

$$V=V_0\supset V_1\supset\cdots\supset V_n=0$$

יהי $J\subset L$ אידאל. התנאים הבאים שקולים:

1. לכל $x\in J$ האופרטור $\pi(x)$ נילפוטנטי.
2. לכל i מתקיים $\pi(J)V_i\subset V_{i+1}$.

הוכחה: נסמן π_i את ההצגה של L במרחב המנה ${}^{V_i}/_{V_{i+1}}$. אלה הצגות אי פריקות.

נניח את התנאי הראשון. ברור שלכל $x \in J$ ולכל i נקבל שהאופרטור $\pi_i(x)$ נילפוטנטי על המנה ${}^{V_i}/_{V_{i+1}}$ - ומכאן נקבל שלמעשה $\pi_i(x) = 0$ - שזה בדיוק אומר שמתקיים $\pi(x) V_i \subset V_{i+1}$.

כעת נניח את התנאי השני. יהי $x \in J$. נקבל כי

$$\pi(x)^n V = \pi(x) V_0 \subset \pi(x)^{n-1} V_1 \subset \cdots \subset \pi(x) V_n = 0$$

■

טענה 2.3 תהי π הצגה ממימד סופי של L במרחב V.

1. מבין כל האידאלים $J \subset L$ עבורם כל איברי $\pi(J)$ נילפוטנטיים, קיים אידאל אחד, שיסומן n_π, שמכיל את כל האחרים.
2. תהי $V = V_0 \supset V_1 \supset \cdots \supset V_n = 0$ סדרת הרכב, ונגדיר שוב π_i ההצגה של L במרחב ${}^{V_i}/_{V_{i+1}}$. אזי

$$n_\pi = \bigcap_{i=0}^{n-1} \ker \pi_i$$

3. האידאל n_π "מאונך" לכל L ביחס לתבנית b_π, שמוגדרת על ידי

$$b_\pi(x, y) = \mathrm{tr}(\pi(x)\pi(y))$$

כלומר

$$b_\pi(n_\pi, L) = 0$$

הוכחה: נשתמש בסדרת ההרכב מהסעיף השני. יהי J אידאל שעבורו כי איברי $\pi(J)$ נילפוטנטיים. בטענה הקודמת ראינו שמתקיים $\pi_i(J) = 0$ לכל i - ולכן $\pi_i \subset J$ לכל i. מכאן,

$$J \subset \bigcap_{i=0}^{n-1} \ker \pi_i$$

נסמן את החיתוך הזה n_π. זהו כמובן אידאל, בתור חיתוך של אידאלים. ברור כי לכל $x \in n_\pi$ מתקיים $\pi(x) V_i \subset V_{i+1}$ לכל i - ולכן מהטענה הקודמת נקבל שלכל $x \in n_\pi$ האופרטור $\pi(x)$ נילפוטנטי. מכאן נקבל את שני הסעיפים הראשונים של הטענה. נותרנו עם הסעיף האחרון - נרצה להראות שלכל $x \in n_\pi$ ולכל $y \in L$ מתקיים

$$\mathrm{tr}(\pi(y)\pi(x)) = 0$$

ולשם כך נראה שהאופרטור $\pi(y)\pi(x)$ הוא נילפוטנטי. לכל $x \in n_\pi$ האופרטור $\pi(x)$ נילפוטנטי, ולכן קיים בסיס B של V כך שלכל $x \in n_\pi$ מתקיים

$$[\pi(x)]_B \in n(k, F)$$

כאשר $k=\dim_F V$. כעת,

$$\begin{aligned}(\pi(y)\pi(x))^2 &= \pi(y)\pi(x)\pi(y)\pi(x)=\pi(y)(\pi(y)\pi(x)+\pi([y,x]))\pi(x)= \\ &= \pi(y)^2\pi(x)^2+\pi(y)\pi([y,x])\pi(x)\end{aligned}$$

באינדוקציה (פעמיים) מוכיחים כי

$$(\pi(y)\pi(x))^k=\sum \pi(y)^i\pi(x_1)\cdots\pi(x_k)$$

כאשר זהו סכום סופי, $0\leq i\leq k$, וכן $x_1,\dots,x_k\in n_\pi$. כעת,

$$[\pi(y)\pi(x)]_B^k=\sum [\pi(y)]_B^i[\pi(x_1)]_B\cdots[\pi(x_k)]_B$$

יש כאן מכפלה של k מטריצות משולשיות עליונות ונילפוטנטיות בגודל $k\times k$ - שהיא בהכרח 0, ולכן האופרטור $\pi(y)\pi(x)$ נילפוטנטי, ובפרט $\mathrm{tr}(\pi(y)\pi(x))=0$. ■

הגדרה 2.4 האידאל n_π נקרא האידאל הנילפוטנטי הגדול ביותר שמתאים להצגה π.

משפט 2.5 תהי L אלגברת לי ממימד סופי. אזי יש לאלגברה L אידאל נילפוטנטי n_L שמכיל כל אידאל נילפוטנטי של L. האידאל הזה מאונך לכל L ביחס לתבנית קילינג:

$$\kappa_L(n_L,L)=0$$

הוכחה: נציב בטענה הקודמת $\pi=\mathrm{ad}_L$ עם המרחב $V=L$. נקבל $n_L=n_{\mathrm{ad}}$ שהוא אידאל של L. לכל $x\in n_L$ האופרטור $\mathrm{ad}_L x$ הוא נילפוטנטי על L, ובפרט $\mathrm{ad}_{n_L}x$ נילפוטנטי. ממשפט אנגל נקבל שהאידאל n_L נילפוטנטי כאלגברת לי - ולכן הוא אידאל נילפוטנטי.

יהי $J\subset L$ אידאל נילפוטנטי. נניח כי

$$J_k=0$$

כיוון שמתקיים $[J,L]\subset J$, נקבל שקומוטטורים באורך k שכל האיברים בהם מתוך J פרט לאחרון, שמתוך L, מתאפסים גם כן. לכן $\mathrm{ad}_L x=0$ לכל $x\in J$, ולכן $J\subset n_L$. ■

2.2 אפיון פשטות למחצה באמצעות תבנית קילינג

למה 2.6 תהי L אלגברת לי ממימד סופי ויהי $0\neq J\subset L$ אידאל. אזי $\kappa_L|_{J\times J}$ היא תבנית קילינג של J (כאלגברת לי).

הוכחה: לכל $x,y\in J$ נקבל כי

$$\begin{aligned}\mathrm{ad}_L x(L)\subset L\\ \mathrm{ad}_L y(L)\subset L\end{aligned}$$

לכן,

$$\kappa_L(x,y)=\mathrm{tr}(\mathrm{ad}_L x\,\mathrm{ad}_L y)=\mathrm{tr}(\mathrm{ad}_L x|_J\,\mathrm{ad}_L y|_J)=\mathrm{tr}(\mathrm{ad}_J x\,\mathrm{ad}_J y)=\kappa_J(x,y)$$

ולכן סיימנו. ■

משפט 2.7 תהי L אלגברת לי ממימד סופי. התנאים הבאים שקולים:

1. $\mathrm{Rad}L=0$ (כלומר L פשוטה למחצה).
2. אין בתוך L אידאלים קומוטטיביים שאינם 0.
3. תבנית קילינג של L אינה מנוונת - כלומר לכל $y\in L$ מתקיים $\kappa_L(x,y)=0$ אם ורק אם $x=0$.

הוכחה: $1\Rightarrow 3$: נסמן

$$J=\{x\in L\mid \kappa(x,L)=0\}$$

זהו אידאל - נניח כי $x\in J$, ויהי $y\in L$, אזי לכל $x\in L$ נקבל

$$\kappa([x,y],z)=\kappa(x,[y,z])=0$$

ולכן זהו אכן אידאל. מהגדרת J נקבל כי $\kappa\mid_{J\times J}=0$, ומהלמה נקבל כי $\kappa_J=0$. ממשפט קרטן נקבל כי J אידאל פתיר - כלומר $J\subset \mathrm{Rad}(L)=0$, כלומר $J=0$ ולכן κ אינה מנוונת.

$3\Rightarrow 2$: יהי אידאל $J\subset L$ קומוטטיבי - כלומר

$$[J,J]=0$$

בבירור, J אידאל נילפוטנטי, ואז $J\subset n_L$. ראינו שמתקיים $\kappa(n_L,L)=0$, כלומר $n_L\subset\{x\in L\mid\kappa(x,L)=0\}$ - הקבוצה הזו היא 0 מההנחה שלנו, ולכן $J=0$.

$2\Rightarrow 1$: בשלילה, נניח כי $\mathrm{Rad}L\neq 0$. זהו אידאל פתיר. נניח כי $(\mathrm{Rad}L)^{(i)}\neq 0$, וכן $(\mathrm{Rad}L)^{(i+1)}\neq 0$. כיוון שהקומוטטור של שני אידאלים של L הוא אידאל, נקבל כי $J=(\mathrm{Rad}L)^{(i)}$ אידאל של L. מהגדרת i מתקיים $[J,J]=0$, ועל כן J קומוטטיבי ואינו אפס - בסתירה. ■

דוגמא נחשב את תבנית קילינג של gl_nF. נייצג מטריצות כאן בתור

$$x=\sum_{i,j}x_{i,j}e_{i,j}$$

נרצה לתאר את המטריצה המייצגת של $\mathrm{ad}x$.

$$\begin{aligned}\mathrm{ad}x(e_{i,j})=xe_{i,j}-e_{i,j}x=\sum_{r,s}x_{r,s}e_{r,s}e_{i,j}-\sum_{r,s}x_{r,s}e_{i,j}e_{r,s}=\\=\sum_r x_{r,i}e_{r,j}-\sum_s x_{j,s}e_{i,s}\end{aligned}$$

נקבל שמתקיים

$$(\mathrm{ad}x)_{(r,s),(i,j)}=\begin{cases}0 & r\neq i,s\neq j\\ -x_{j,s} & r=i,s\neq j\\ x_{r,i} & r\neq i,s=j\\ x_{i,i}-x_{j,j} & r=i,s=i\end{cases}$$

כעת,

$$\kappa(x,y)=\mathrm{tr}(\mathrm{ad}x\mathrm{ad}y)=\sum_{i,j,r,s=1}^{n}(\mathrm{ad}x)_{(r,s)(i,j)}(\mathrm{ad}y)_{(i,j)(r,s)}=\cdots=$$

$$=2n\sum_{j,s=1}^{n}x_{j,s}y_{s,j}-2\left(\sum_{i=1}^{n}x_{i,i}\right)\left(\sum_{j=1}^{n}y_{j,j}\right)=2n\mathrm{tr}(xy)-2\mathrm{tr}(x)\mathrm{tr}(y)$$

אם ניקח $x=\lambda I$ נקבל כמובן

$$2n\lambda\mathrm{tr}y-2\lambda n\mathrm{tr}y=0$$

אז המרכז (המטריצות הסקלריות) מאונך לכל האלגברה. נצמצם כעת לאידאל $J=\mathrm{sl}_nF$ ונקבל

$$x_{\mathrm{sl}_nF}(x,y)=2n\mathrm{tr}(xy)$$

וזו תבנית לא מנוונת.

2.3 פירוק אלגברת לי פשוטה למחצה לסכום ישר של אלגבראות לי פשוטות

טענה 2.8 נתונות אלגבראות לי $L_1,\ldots,L_k$ מעל F. אזי אלגברת לי $L_1\oplus\cdots\oplus L_k$ פשוטה למחצה אם ורק אם L_i פשוטה למחצה לכל i.

הוכחה: מספיק להוכיח עבור $k=2$. נראה כי

$$\mathrm{Rad}(L_1\times L_2)=\mathrm{Rad}(L_1)\times\mathrm{Rad}(L_2)$$

אגף ימין בבירור פתיר, ועל כן מוכל בצד שמאל. להיפך, יהי $R\subset L_1\times L_2$ אידאל פתיר. נסמן J_1,J_2 את ההטלות של R על L_1,L_2 בהתאמה. אזי $J_1\subset L_1,J_2\subset L_2$ אידאלים פתירים, ולכן $J_1\subset\mathrm{Rad}L_1,J_2\subset\mathrm{Rad}L_2$. כמובן, $R\subset J_1\times J_2\subset\mathrm{Rad}L_1\times\mathrm{Rad}L_2$ - נציב $R=\mathrm{Rad}(L_1\times L_2)$ ונסיים. ■

טענה 2.9 תהי L אלגברת לי ממימד סופי מעל שדה F. יהי $F\subset K$ שדה הרחבה.נסתכל בהרחבת הסקלרים $L_K=L\otimes_F K$.

1. L פשוטה למחצה אם ורק אם L_K פשוטה למחצה.
2. $\mathrm{Rad}L_K=\mathrm{Rad}L\otimes_F K$.

הוכחה:

1. יהי $x_1,\ldots,x_n$ בסיס של L מעל F. אזי $x_1\otimes 1,\ldots,x_n\otimes 1$ בסיס של L_K מעל K. מתקיים

$$\kappa_L(x_i,x_j)=\kappa_{L_K}(x_i\otimes 1,x_j\otimes 1)$$

ידוע לנו כי L פשוטה למחצה אם ורק אם κ_L לא מנוונת, כלומר אם ורק אם המטריצה $(\kappa_L(x_i,x_j))_{i,j}$ הפיכה, שזה אם ורק אם המטריצה $(\kappa_{L_K}(x_i\otimes 1,x_j\otimes 1))_{i,j}$ הפיכה, אם ורק אם κ_{L_K} לא מנוונת, אם ורק אם L_K פשוטה למחצה.

2. מתקיים $L \subset L$ Rad$L$ אידאל פתחר, ולכן גם $\mathrm{Rad}L \otimes_F K$ אידאל פתיר של L_K.
כמובן,

$$(\mathrm{Rad}L \otimes_F K)^{(i)} = (\mathrm{Rad}L)^{(i)} \otimes_F K$$

ולכן

$$\mathrm{Rad}L \otimes_F K \subset \mathrm{Rad}L_K$$

יש לנו את הסדרה המדוייקת

$$0 \to \mathrm{Rad}L \to L \to {}^{L}\!/\!_{\mathrm{Rad}L} \to 0$$

והרי K מודול חופשי מעל F, ולכן הפעלת הטנזור תשמור על הסדרה מדוייקת -
נקבל

$$0 \to \mathrm{Rad}L \otimes_F K \to L \otimes_F K \to {}^{L}\!/\!_{\mathrm{Rad}L} \otimes_F K \to 0$$

נקבל כי

$${}^{L\otimes_F K}\!/\!_{\mathrm{Rad}L\otimes_F K} \cong {}^{L}\!/\!_{\mathrm{Rad}L} \otimes_F K$$

והרי ${}^{L}\!/\!_{\mathrm{Rad}L}$ פשוטה למחצה - ולכן אגף ימין כולו פשוט למחצה - כלומר,

$${}^{\mathrm{Rad}(L_K)}\!/\!_{\mathrm{Rad}L\otimes_F K} \subset \mathrm{Rad}\left({}^{L\otimes_F K}\!/\!_{\mathrm{Rad}L\otimes_F K}\right) = 0$$

כלומר $\mathrm{Rad}\,(L_K) = \mathrm{Rad}\,(L) \otimes_F K$.

■