אלגבראות לי

ארזים ©

31 במרץ 2019

1 פתירות ונילפוטנטיות באלגבראות לי

1.1 משפט לי

נזכיר איפה עצרנו:

משפט 1.1 תהי L אלגברת לי מעל שדה F ממציין 0. תהי π הצגה ממימד סופי של L במרחב V. יהי $J \subset L$ אידאל ויהי $\lambda \in J^*$. יהי

$$V_\lambda = \{u \in V \mid \pi(x) v = \lambda(x) v \forall x \in J\}$$

אזי $V_\lambda \subset V$ תת מרחב אינווריאנטי של π.

הוכחה: אם $V_\lambda = 0$ סיימנו. אחרת, נרצה להראות שלכל $x \in L$, $v \in V_\lambda$ מתקיים $\pi(x) v \in V_\lambda$, כלומר לכל $y \in J$ מתקיים

$$\pi(y)(\pi(x) v) = \lambda(y) \pi(x) v$$

מתקיים

$$\begin{aligned}\pi(y)\pi(x) v &= \pi(x)\pi(y) v + \pi([y,x]) v = \\ &= \pi(x)\lambda(y) v + \lambda([y,x]) v\end{aligned}$$

ולכן נותר יספיק להוכיח כי $\lambda([y,x]) = 0$ לכל $x \in L$, $y \in J$. נקבע $0 \neq v_0 \in V_\lambda$. נגדיר לכל i:

$$v_i = \pi(x)^i v_0$$

יהי k מקסימלי עבורו $v_0, v_1, \ldots, v_k$ היא בלתי תלויה לינארית. נסמן

$$V' = Fv_0 + \cdots + Fv_k$$

כעת,

$$\pi(x) V' = \sum_{i=0}^{k} F\pi(x) v_i = \sum_{i=0}^{k} Fv_{i+1} \subset \sum_{i=0}^{k} Fv_i = V'$$

כעת נראה כי V' אינווריאנטי גם תחת $\pi\left(J\right)$. יהי $y\in J$. נראה באינדוקציה שלכל $y\in J$ מתקיים

$$\pi\left(y\right)v_i\in\lambda\left(y\right)v_i+Fv_{i-1}+\cdots+Fv_0$$

עבור $i\leq k$. עבור $i=0$ נקבל $\pi\left(y\right)v_0=\lambda\left(y\right)v_0$, וזה נכון. כעת,

$$\begin{aligned}\pi\left(y\right)v_{i+1}&=\pi\left(y\right)\pi\left(x\right)v_i=\pi\left(x\right)\pi\left(y\right)v_i+\pi\left(\left[y,x\right]\right)v_i\in\\&\in\pi\left(x\right)\left(\lambda\left(y\right)v_i+Fv_{i-1}+\cdots+Fv_0\right)+\lambda\left(\left[y,x\right]\right)v_i+Fv_{i-1}+\cdots+Fv_0=\\&=\lambda\left(y\right)v_{i+1}+Fv_i+\cdots+Fv_1+Fv_0\end{aligned}$$

קיבלנו כמובן $\pi\left(y\right)V'\subset V'$ לכל $y\in J$, אבל בנוסף קיבלנו גם כי לכל $y\in J$ מתקיים

$$\mathrm{tr}\left(\pi\left(y\right)|_{V'}\right)=\left(k+1\right)\lambda\left(y\right)$$

בפרט, לכל $x\in L$ ולכל $y\in J$ מתקיים

$$\mathrm{tr}\left(\pi\left(\left[y,x\right]\right)|_{V'}\right)=\left(k+1\right)\lambda\left(\left[y,x\right]\right)$$

אבל בצד שמאל למעשה יש לנו

$$\mathrm{tr}\left(\pi\left(y\right)|_{V'}\pi\left(x\right)|_{V'}-\pi\left(x\right)|_{V'}\pi\left(y\right)|_{V'}\right)=0$$

ולכן

$$\left(k+1\right)\lambda\left(\left[y,x\right]\right)=0$$

והרי F ממציין 0, ולכן $\lambda\left(\left[y,x\right]\right)=0$. ■

מעתה נניח כי המציין של השדה הוא 0.

משפט 1.2 תהי π הצגה ממימד סופי של אלגברת לי L במרחב V. נניח כי L פתירה. נניח כי לכל $x\in L$, האופרטור $\pi\left(x\right)$ ניתן לשילוש. אזי קיים למרחב V בסיס B עבורו $\left[\pi\left(x\right)\right]_B$ משולשת עליונה לכל $x\in L$ (שילוש סימולטני).

הוכחה: כיוון שיש את $\pi\left(L\right)\subset\mathrm{gl}\left(V\right)$ שהיא תת אלגברת לי פתירה ממימד סופי מעל F, אפשר להניח כי L ממימד סופי (כי נחליף את L עם $\pi\left(L\right)$). ראשית, נוכיח כי יש וקטור עצמי משותף לכל $\pi\left(L\right)$. נוכיח זאת באינדוקציה על $\dim L$. אם $\dim L=1$, אזי $L=Fx_0$, ונתון כי $\pi\left(x_0\right)$ נתן לשילוש למטריצה משולשת עליונה, ואז הווקטור הראשון בבסיס המתאים הוא ווקטור עצמי של $\pi\left(x_0\right)$, ולכן גם של כל $\pi\left(L\right)$. באופן כללי, L פתירה, ולכן

$$\left[L,L\right]\subsetneq L$$

ראינו כי כל תת מרחב $\left[L,L\right]\subset J\subset L$ הוא אידאל. נקח J מקו־מימד 1. כמובן, גם J פתיר (כתת אלגברת לי). כמו כן, $\pi\mid_J$ היא הצגה של J. כיוון שמתקיים $\dim J=\dim L-1$, אזי באינדוקציה יש $0\neq v_0\in V$ שהוא ווקטור עצמי משותף לכל $\pi\left(J\right)$, כלומר לכל $y\in J$ מתקיים

$$\pi\left(y\right)v_0=\lambda\left(y\right)v_0$$

כמובן, $\lambda \in J^*$. נתבונן, כמו קודם, במרחב

$$V_\lambda = \{v \in V \mid \pi(y) v = \lambda(y) v \forall y \in J\}$$

זה תת מרחב שאינווריאנטי להצגה π. כעת, יהי $x \in L$ עבורו $L = J \oplus Fx_0$. בפרט,

$$\pi(x_0) V_\lambda \subset V_\lambda$$

כמובן, $\pi(x_0)$ ניתן לשילוש, ולכן $\pi(x_0)|_{V_\lambda}$ ניתן לשילוש. בפרט, יש לה ווקטור עצמי בתוך V_λ: יהי $0 \neq w_0 \in V_\lambda$ עבורו $\pi(x) w_0 = cw_0$. לכל $x \in L$ נכתוב $x = y + t \cdot x_0$, כאשר $y \in J, t \in F$. כעת,

$$\pi(x) w_0 = \pi(y) w_0 + t\pi(x_0) w_0 = \lambda(y) w_0 + tcw_0 = (\lambda(y) + tc) w_0$$

ולכן w_0 ווקטור עצמי משותף לכל $\pi(L)$. כעת נראה באינדוקציה על $\dim V$ את השילוש הסימולטני. אם $\dim V = 1$ הטענה ברורה. באופן כללי, יהי $0 \neq v_1 \in V$ ווקטור עצמי משותף לכל $\pi(L)$, כלומר $\pi(x) v_1 = \lambda(x) v_1$ עבור $\lambda \in V^*$. בפרט, $V_1 = Fv_1$ הוא תת מודול (תת מרחב אינווריאנטי) של V. נתבונן בהצגת המנה $\overline{\pi}$ של L במרחב המנה $U = {}^{V}/_{V_1}$ -

$$\overline{\pi}(x)(v + V_1) = \pi(x) v + V_1$$

ברור כי המימד של מרחב זה קטן באחד, וברור גם כי $\overline{\pi}(x)$ ניתן לשילוש לכל $x \in L$. מהנחת האינדוקציה $\overline{\pi}$ ניתנת לשילוש סימולטני - כלומר קיים בסיס $\overline{B} = \{v_2 + V_1, \ldots, v_n + V_1\}$ כך שלכל $x \in L$ המטריצה $[\overline{\pi}(x)]_{\overline{B}}$ משולשת עליונה. יהי

$$B = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$$

זהו בסיס למרחב V. כעת ברור כי $[\pi(x)]_B$ היא משולשת עליונה לכל $x \in L$, וסיימנו. ■

משפט 1.3 (לי) תהי L אלגברת לי פתירה מעל שדה סגור אלגברית F. תהי π הצגה ממימד סופי n של L במרחב V. אזי קיים בסיס B של V עבורו $[\pi(x)]_B \in b(n, F)$ לכל $x \in L$.

הוכחה: F סגור אלגברית, לכן כל מטריצה ניתנת לשילוש - ומכאן המשפט נובע מהמשפט הקודם. ■

מסקנה 1.4 תהי L אלגברת לי פתירה מעל שדה סגור אלגברית. תהי π הצגה אי פריקה ממימד סופי של L. אזי π ממימד 1.

הוכחה: ממשפט לי, יש ווקטור עצמי משותף לכל π במרחב ההצגה V, שנסמנו v_1. בפרט, $0 \neq Fv_1 \subset V$ הוא תת מודול. π אי פריקה, ולכן $V = Fv_1$ ממימד 1. ■

מסקנה 1.5 תהי L אלגברת לי פתירה ממימד סופי מעל שדה סגור אלגברית F. אז יש סדרה עולה של אידאלים

$$0 = J_0 \subset J_1 \subset J_2 \subset \cdots \subset J_n = L$$

עבורה מתקיים $\dim J_i = i$ לכל i.

הוכחה: נתבונן בהצגה $\pi = \mathrm{ad}$ של L במרחב L. ממשפט לי, יש בסיס B של L עבורו $[\mathrm{ad}x]_B \in b(n,F)$, כאשר $n = \dim_F L$. נסמן $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$. נגדיר

$$\begin{aligned} J_0 &= 0 \\ J_1 &= Fv_1 \\ &\vdots \\ J_i &= Fv_1 \oplus \cdots \oplus Fv_i \\ &\vdots \\ J_n &= Fv_1 \oplus \cdots \oplus Fv_n = L \end{aligned}$$

כמובן, $0 = J_0 \subset J_1 \subset \cdots \subset J_n = L$ כאשר $\dim J_i = i$. כמו כן, כל J_i הוא תת מרחב אינווריאנטי של ad, בגלל השילוש ־ כלומר לכל $x \in L$ מתקיים $[x, J_i] \subset J_i$ ־ כלומר J_i אידאל. ■

משפט 1.6 תהי L אלגברת לי מעל שדה F. אזי L פתירה אם ורק אם $[L,L]$ היא אלגברת לי נילפוטנטית.

הוכחה: נניח כי L פתירה. ראשית, נניח כי F סגור אלגברית. כמו קודם, ההצגה ad של L במרחב L ניתנת לשילוש סימולטני. יהי B בסיס של L כך שלכל $x \in L$ המטריצה $[\mathrm{ad}x]_B \in b(n,F)$, כאשר $n = \dim_F L$. כלומר, $[\mathrm{ad}L]_B \subset b(n,F)$. כמו כן,

$$[\mathrm{ad}\,[L,L]]_B = [[\mathrm{ad}L, \mathrm{ad}L]]_B \subset [b(n,F), b(n,F)] = n(n,F)$$

ידוע לנו כי $n(n,F)$ היא נילפוטנטית ־ ונסיק מכאן כי $\mathrm{ad}\,[L,L]$ היא אלגברת לי נילפוטנטית. מכאן, לכל $x_1, \ldots, x_n, x_{n+1} \in [L,L]$, נקבל כי

$$[x_1\,[x_2, [\ldots [x_n, x_{n+1}] \ldots]]]$$

הוא 0 ־ שכן כתוב כאן למעשה $\mathrm{ad}x_1\left(\mathrm{ad}x_2\left(\ldots\left(\mathrm{ad}x_n\left(x_{n+1}\right)\right)\right)\right)$, והרכבה של n העתקות מתוך $n(n,F)$ היא 0. למעשה, ניתן היה לקחת $x_{n+1} \in L$ באופן כללי. זה מראה שהאלגברה $[L,L]$ נילפוטנטית ־ ואפילו יותר, זה מראה שלכל $x_1, \ldots, x_n \in [L,L]$, ההרכבה של $\mathrm{ad}x_i$ היא אופרטור האפס על כל L.

כעת, נניח כי F שדה כלשהו, ויהי $\overline{F}$ הסגור האלגברי של F. נתבונן בהרחבת הסקלרים

$$\overline{L} = L \otimes_F \overline{F}$$

היא פתירה, שכן L פתירה (ראינו בתרגילי הבית). לכן, ממה שראינו הרגע, $\left[\overline{L}, \overline{L}\right]$ נילפוטנטית, והרי $\left[\overline{L}, \overline{L}\right] \subset [L,L] \otimes_F \overline{F}$, ולכן נקבל כי $[L,L]$ נילפוטנטית.

בכיוון השני ־ נניח כי $[L,L]$ היא אלגברת לי נילפוטנטית. אזי

$$L^{(i+1)} = [L,L]^{(i)} \subset [L,L]_i$$

ולכן כיוון שהחל מאיפשהו צד ימין מתאפס, גם צד שמאל יתאפס משם, ולכן L פתירה. ■

1.2 משפט אנגל

תהי L אלגברת לי נילפוטנטית, כלומר יש N טבעי עבורו $L_N=0$, כלומר לכל $x_1,\dots,x_n\in L$ מתקיים

$$[x_1,[x_2,[\dots,[x_{n-1},x_n]\dots]]]=0$$

כלומר, $\mathrm{ad}x_1\mathrm{ad}x_2\dots\mathrm{ad}x_n=0$. בפרט, $\mathrm{ad}x$ העתקה לינארית נילפוטנטית לכל $x\in L$.

טענה 1.7 תהי L אלגברת לי נילפוטנטית ממימד סופי. יהי $0\neq J\subset L$ אידאל. אזי $J\cap Z(L)\neq 0$.

הוכחה: נתבונן בהצגה $\mathrm{ad}_L\mid_J$ של J במרחב L. זאת הצגה ממימד סופי של L כך שלכל $x\in L$ האופרטור $\pi(x)=\mathrm{ad}x$ הוא נילפוטנטי על L, ולכן נילפוטנטי גם על J. בפרט, $\pi(x)$ ניתן לשילוש לכל $x\in L$. L נילפוטנטית ועל כן כמובן פתירה, ולכן ראינו כבר שקיים שילוש סימולטני של ההצגה. בפרט, קיים ווקטור עצמי משותף $0\neq y_0\in J$ עבורו לכל $x\in L$ מתקיים

$$\begin{aligned}\mathrm{ad}x(y_0)&=0\\ [x,y_0]&=0\end{aligned}$$

כלומר $y_0\in J\cap Z(L)$, וסיימנו. ■

הערה 1.8 היה מספיק להניח כי J ממימד סופי, ולא כל L.

משפט 1.9 (אנגל) תהי L אלגברת לי ממימד סופי. נניח כי לכל $x\in L$, האופרטור $\mathrm{ad}x$ הוא נילפוטנטי על L. אזי L אלגברת לי נילפוטנטית.

הוכחה: נוכיח ראשית כי L פתירה. תהי $L'\subset L$ תת אלגברת לי פתירה ממימד מקסימלי. נבחין כי לכל $0\neq x\in L$, האלגברה $Fx\subset L$ היא תת אלגברת לי פתירה - כי היא אבלית - ולכן L' מוגדרת היטב. נניח בשלילה כי $L'\subsetneq L$. נתבונן בהצגה π של L' במרחב L המוגדרת על ידי

$$\pi(x')=\mathrm{ad}_Lx'$$

כמובן, L' תת מרחב אינווריאנטי (כלומר תת מודול), ולכן נוכל להסתכל בהצגת המנה $\overline{\pi}$ של L' במרחב המנה L/L' -

$$\overline{\pi}(x')(z+L')=[x',z]+L'$$

האופרטור ad_Lx' נילפוטנטי על L לכל x', אז ברור שגם $\overline{\pi}(x')$ נילפוטנטי על L/L' - ולכן ניתן לשילוש. הואיל והאלגברה L' פתירה נקבל כי $\overline{\pi}$ ניתנת לשילוש סימולטני, ובפרט יש לאופרטורים $\overline{\pi}(L')$ וקטור עצמי משותף, כלומר יש $x_0\in L\backslash L'$ עבורו $\overline{\pi}(x')(x_0+L')=$ L' לכל $x'\in L'$. נגדיר כעת $L''=L'+Fx_0$. נסיק כי L'' היא תת אלגברת לי, וכן L' אידאל של L'' מקו־מימד 1 - כלומר L''/L' פתירה (כי היא ממימד 1), ולכן גם L'' פתירה - בסתירה למקסימליות המימד של L'. קיבלנו כי $L=L'$ פתירה.

נתבונן בהצגה $\pi=\mathrm{ad}_L$ של L במרחב L. כיוון שלכל $x\in L$, האופרטור $\pi(x)$ נילפוטנטי, אזי הוא גם ניתן לשילוש - ולכן יש שילוש סימולטני של π, כלומר בסיס B של

L עבורו $[\mathrm{ad}L]_B \subset b\left(n,F\right)$, עבור $n=\dim_F L$. הערך העצמי היחיד של כל האופרטורים הללו הוא 0, שכן הם נילפוטנטיים, ולכן למעשה $[\mathrm{ad}L]_B \subset n\left(n,F\right)$. אגף ימין היא אלגברת לי נילפוטנטית, כפי שראינו כבר, ולכן גם $\mathrm{ad}L$ נילפוטנטית - והרי $\mathrm{ad}L \cong {}^{L}/_{Z(L)}$, ולכן ראינו כי גם L נילפוטנטית. ■

למה 1.10 יהי V מרחב וקטורי ממימד סופי. נניח כי $x \in \mathrm{gl}\left(V\right)$ העתקה לינארית נילפוטנטית. אזי גם $\mathrm{ad}x$ היא נילפוטנטית.

הוכחה: נכתוב

$$\mathrm{ad}^m x\left(y\right)=\left[x,\left[x,\left[\ldots,\left[x,y\right]\ldots\right]\right]\right]$$

כאשר נפתח את כל הקומוטטורים, נקבל סכום (עם סימנים כלשהם) של גורמים מהצורה x^iyx^j עם $i+j=m$. לכן, אם $x^n=0$ וניקח $m=2n$, אזי $i\geq n$ או $j\geq n$ ולכן כל גורם הוא 0 - כלומר $\mathrm{ad}^m x=0$. ■

מסקנה 1.11 תהי π הצגה ממימד סופי של אלגברת לי L במרחב V. נניח כי לכל $x\in L$ האופרטור $\pi\left(x\right)$ הוא נילפוטנטי. אזי $\pi\left(L\right)$ אלגברת לי נילפוטנטית, ויש בסיס B של V עבורו

$$\left[\pi\left(L\right)\right]_B \subset n\left(\dim_F L,F\right)$$

הוכחה: לפי הלמה, $\mathrm{ad}\pi\left(x\right)$ נילפוטנטי לכל $x\in L$, ולכן $\pi\left(L\right)$ מקיימת את תנאי משפט אנגל - וסיימנו (השילוש הסימולטני כמובן נובע כמו שראינו בהוכחת משפט אנגל). ■

1.3 התנאי של קרטאן (Cartan) לפתירות אלגברת לי

ניזכר בתבנית קילינג של אלגברת לי L ממימד סופי:

$$\kappa\left(x,y\right)=\mathrm{tr}\left(\mathrm{ad}_L x\circ \mathrm{ad}_L y\right)$$

משפט 1.12 תהי L אלגברת לי פתירה ממימד סופי מעל F. אזי

$$\kappa\left(L,\left[L,L\right]\right)=0$$

כלומר לכל $x,y,z\in L$ מתקיים

$$\mathrm{tr}\left(\mathrm{ad}x\circ \mathrm{ad}\left[y,z\right]\right)=0$$

הוכחה: נניח קודם כי F סגור אלגברית. ראינו כי יש בסיס B של L עבורו $[\mathrm{ad}L]_B \subset b(n,F)$ כאשר $n=\dim_F L$. מכאן,

$$[\mathrm{ad}\,[L,L]]_B = [\mathrm{ad}L, \mathrm{ad}L]_B \subset [b(n,F), b(n,F)] = n(n,F)$$

על כן, בהינתן $x,y,z \in L$ נקבל כי

$$\mathrm{tr}\,(\mathrm{ad}x \circ \mathrm{ad}\,[y,z]) = \mathrm{tr}\,([\mathrm{ad}x]_B\,[[\mathrm{ad}y]_B\,, [\mathrm{ad}z]_B])$$

המוכפל הימני כאן נילפוטנטי - ועל כן נקבל כמובן 0.

באופן כללי, יהי $\overline{F}$ הסגור האלגברי של F, ויהי $\overline{L} = L \otimes_F \overline{F}$ הרחבת הסקלרים. זו גם כן פתירה. נניח כי $B = \{x_1, \ldots, x_n\}$ בסיס של L מעל F:

$$L = Fx_1 \oplus \cdots \oplus Fx_n$$
$$L \otimes_F \overline{F} = x_1 \otimes \overline{F} \oplus \cdots \oplus x_n \otimes \overline{F}$$

כעת, $B \otimes 1 = \{x_1 \otimes 1, \ldots, x_n \otimes 1\}$ הוא בסיס של $\overline{L}$ מעל F. כעת,

$$\mathrm{ad}_{\overline{L}}\,(x \otimes 1) = \mathrm{ad}_L x \otimes \mathrm{id}_{\overline{F}}$$

ועל כן

$$[\mathrm{ad}_{\overline{L}}\,(x \otimes 1)]_{B\otimes 1} = [\mathrm{ad}_L x]_B$$

נסיק מכאן שלכל $x,y \in L$ מתקיים

$$\kappa_{\overline{L}}\,(x \otimes 1, y \otimes 1) = \kappa_L\,(x,y)$$

לפי מה שהוכחנו כבר,

$$\kappa_{\overline{L}}\left(\overline{L}, \left[\overline{L}, \overline{L}\right]\right) = 0$$

והרי

$$\kappa\,(L,[L,L]) \subset \kappa\left(\overline{L}, \left[\overline{L}, \overline{L}\right]\right)$$

■

תזכורת פירוק ז'ורדן: יהי V מרחב וקטורי ממימד סופי מעל שדה F. תהי $x \in \mathrm{End}_F V$, כך שכל הערכים העצמיים של x נמצאים בשדה F. אז יש פירוק

$$x = x_s + x_n$$

כאשר x_s ניתנת ללכסון (מעל F), x_n נילפונטית, וכן $x_n x_s = x_s x_n$. כמו כן, יש פולינומים $f(t), g(t) \in F[t]$ כך שמתקיים

$$x_s = f(x)\,, x_n = g(x)$$

וניתן לבחור את f,g כך שיקיימו $f(0) = g(0) = 0$.

למה 1.13 בסימונים הללו,

$$\mathrm{ad}x = \mathrm{ad}x_s + \mathrm{ad}x_n$$

הוא פירוק ז'ורדן של $\mathrm{ad}x$.

הוכחה: נעבור לקואורדינטות לפי בסיס B המלכסן את x_s (ושמיט את הסימון של המטריצה המייצגת). נשתמש בבסיס הסטנדרטי $e_{i,j}$ ונקבל

$$\mathrm{ad}x_s\left(e_{i,j}\right) = x_s e_{i,j} - e_{i,j} x_s = \lambda_i e_{i,j} - \lambda_j e_{i,j} = \left(\lambda_i - \lambda_j\right) e_{i,j}$$

כאשר λ_i הוא הערך העצמי מספר i על האלכסון. לכן $\mathrm{ad}x_s$ ניתנת ללכסון. בלמה קודמת ראינו כי $\mathrm{ad}x_n$ נילפוטנטית, שכן x_n נילפוטנטית, והרי

$$\left[\mathrm{ad}x_s, \mathrm{ad}x_n\right] = \mathrm{ad}\left[x_s, x_n\right] = \mathrm{ad}0 = 0$$

וסיימנו. ■

בפעם הבאה, נוכיח את המשפט הבא:

משפט 1.14 יהי V מרחב וקטורי ממימד סופי מעל שדה F. תהי $L \subset \mathrm{gl}\left(V\right)$ תת אלגברת לי. נניח כי לכל $x, y \in \left[L, L\right]$ מתקיים

$$\mathrm{tr}\left(xy\right) = 0$$

אזי $\left[L, L\right]$ נילפוטנטית.