# אלגבראות לי

ⓒ ארזים

24 במרץ 2019

## 1 מושגים ראשונים

### 1.1 מודולים והצגות

**למה 1.1** (שור) תהי $L$ אלגברת לי מעל שדה $F$. יהי $V$ מודול אי פריק מעל $L$. יהי $W$ מודול כלשהו מעל $L$.

1. יהי $0 \neq T \in \mathrm{Hom}_L\left(V, W\right)$. אזי $T$ חד־חד־ערכי.
2. יהי $0 \neq T \in \mathrm{Hom}_L\left(W, V\right)$. אזי $T$ על.
3. נניח כי $W$ מודול אי פריק מעל $L$. אזי $V \cong W \iff \mathrm{Hom}_L\left(V, W\right) \neq 0$.
4. נניח כי $V$ ממימד סופי וכן כי $F$ סגור אלגברית. אזי $\mathrm{Hom}_L\left(V, V\right) = F \cdot \mathrm{id}_V$.

**הוכחה:**

1. ידוע כי $\ker T \subset V$ תת מודול. $V$ אי פריק, ולכן מתקיים $\ker T \in \{0, V\}$. $T \neq 0$, ולכן $\ker T \neq V$, ולכן $\ker T = 0$, ומכאן $T$ חד־חד־ערכי.
2. ידוע כי $\mathrm{Im} T \subset V$ תת מודול. $V$ אי פריק, ולכן מתקיים $\mathrm{Im} T \in \{0, V\}$. $T \neq 0$, ולכן $\mathrm{Im} T \neq 0$, ולכן $\mathrm{Im} T = V$, ומכאן $T$ על.
3. הכיוון $\Leftarrow$ ברור. בכיוון השני, נניח שקיים $0 \neq \varphi \in \mathrm{Hom}_L\left(V, W\right)$. מהסעיפים הקודמים, $\varphi$ חד־חד־ערכי ועל, ולכן איזומורפיזם.
4. נניח כי $T : V \to V$ הומומורפיזם. $F$ סגור אלגברית וכן $V$ ממימד סופי, ולכן יש להומומורפיזם $T$ ערך עצמי $\lambda \in F$, המקיים $\ker\left(T - \lambda \mathrm{id}_V\right) \neq 0$. כמובן, $T - \lambda \mathrm{id}_V \in \mathrm{Hom}_F\left(V, V\right)$, וכן $V$ אי פריק, ולכן נובע $\ker\left(T - \lambda \mathrm{id}_V\right) = V$, כלומר $T - \lambda \mathrm{id}_V = 0$.

■

### 1.2 סדרות הרכב ופריקות לחלוטין

**הגדרה 1.2** יהי $V$ מודול מעל אלגברת לי $L$. **סדרת הרכב** (**Composition Series**) היא סדרת תת מודולים

$$V = V_n \supsetneq V_{n-1} \supsetneq \cdots \supsetneq V_1 \supsetneq V_0 = 0$$

כך שלכל $1 \leq i \leq n$ המודול $V_i / V_{i-1} \neq 0$ הוא אי פריק מעל $L$.

**טענה 1.3** יהי $V$ מודול ממימד סופי מעל $L$. אז קיימת סדרת הרכב של $V$.

**הוכחה:** יהי $W_1 \subsetneq V$ תת מודול של $V$ ממימד מקסימלי. אזי ${}^{V}/_{W_1}$ הוא מודול אי פריק (אם היה לו תת מודול, הוא היה מתאים לתת מודול של $V$ שמכיל את המודול $W_1$). יהי $W_2 \subsetneq W_1$ תת מודול של $W_1$ ממימד מקסימלי. אזי גם ${}^{W_1}/_{W_2}$ מודול אי פריק (מאותה סיבה). נמשיך כך עד שהתהליך יסתיים ־ זה מובטח בזכות סופיות המימד של $V$. ■

**משפט 1.4** (ז'ורדן־הלדר) יהי $V$ מודול מעל $L$ ונניח כי יש לו שתי סדרות הרכב:

$$V = V_n \supsetneq V_{n-1} \supsetneq \cdots \supsetneq V_1 \supsetneq V_0 = 0$$
$$V = W_m \supsetneq W_{m-1} \supsetneq \cdots \supsetneq W_1 \supsetneq W_0 = 0$$

אזי $m = n$ ויש תמורה $\sigma$ של $\{1, 2, \ldots, n\}$ כך שלכל $i$ מתקיים

$${}^{V_i}/_{V_{i-1}} \cong {}^{W_{\sigma(i)}}/_{W_{\sigma(i)-1}}$$

ההוכחה של המשפט זהה לחלוטין להוכחה שלו בתורת החבורות על ידי תרגום של תת־חבורות לתתי מודולים, וחבורות פשוטות למודלים אי פריקים.

נניח כי $V$ מודול ממימד סופי מעל $L$. תהי

$$V = V_n \supsetneq V_{n-1} \supsetneq \cdots \supsetneq V_1 \supsetneq V_0 = 0$$

יהי $B_1$ בסיס של $V_1$. נשלים אותו לבסיס $B_2$ של $V_2$, שנשלים לבסיס $B_3$ של $V_3$ וכן הלאה, עד שנקבל בסיס $B$ של $V_n = V$. נתבונן בהצגה התאימה למודול $V$:

$$\pi(x)(v) = x \cdot v$$

אזי יתקיים

$$[\pi(x)]_B = \begin{pmatrix} \tau_1(x) & & & * \\ & \tau_2(x) & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \tau_n(x) \end{pmatrix}$$

בצורת בלוקים, כאשר

$$\begin{aligned} \tau_1(x) &= [\pi(x)|_{V1}]_{B_1} \\ \tau_2(x) &= \left[\overline{\pi}(x)|_{V_2/V_1}\right]_{(B_2 \setminus B_1)+V_1} \\ \tau_3(x) &= \left[\overline{\pi}(x)|_{V_3/V_2}\right]_{(B_3 \setminus B_2)+V_2} \\ &\vdots \end{aligned}$$

וכן הלאה.

**מסקנה 1.5** תהי $\pi$ הצגה של $L$ במרחב $V$, כך שאפשר לפרק את $V$ לסכום ישר סופי של תת מודולים אי פריקים. נניח כי יש שני פירוקים כאלה:

$$V = V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_n = W_1 \oplus \cdots \oplus W_m$$

אזי $m = n$, וקיימת תמורה $\sigma$ של $\{1, 2, \ldots n\}$ כך שלכל $i$ מתקיים $V_i \cong W_{\sigma(i)}$.

**הוכחה:** פירוק כמו שמתואר במסקנה מגדיר לנו סדרת הרכב:

$$V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_n \supsetneq \cdots \supsetneq V_1 \oplus V_2 \supsetneq V_1 \supsetneq 0$$

ויש כזו סדרה גם לפירוק השני. מפעילים את משפט ז'ורדן־הלדר ומקבלים את המסקנה. ■

נישאר בסימונים המסקנה ונניח בלי הגבלת הכלליות כי $W_i \cong V_i$ (על ידי סידור מחדש). כמו כן, נסדר את הפירוקים כך שמודולים איזומורפיים אלו לאלו יהיו צמודים בפירוק, כלומר

$$\begin{gathered} V_1 \cong V_2 \cong \ldots \cong V_{i_1} \\ V_{i_1+1} \cong V_{i_1+2} \cong \ldots \cong V_{i_1+i_2} \\ \vdots \\ V_{i_1+\cdots+i_{r-1}+1} \cong V_{i_1+\cdots+i_{r-1}+2} \cong \ldots \cong V_{i_1+\cdots+i_{r-1}+i_r} = V_n \end{gathered}$$

כאשר אין מבין $V_{i_1}, V_{i_1+i_2}, \ldots, V_{i_1+\cdots+i_r}$ זוג מודולים איזומורפיים. נסמן את **המרכיבים האיזוטיפיים** של $V$ (לפי הפירוק):

$$\begin{aligned} U_1 &= V_1 \oplus \cdots \oplus V_{i_1} \\ U_2 &= V_{i_1+1} \oplus \cdots \oplus V_{i_1+i_2} \\ &\vdots \\ U_r &= V_{i_1+\cdots+i_{r-1}+1} \oplus \cdots \oplus V_{i_1+\cdots+i_r} \end{aligned}$$

כאשר כמובן $V = U_1 \oplus U_2 \oplus \cdots \oplus U_r$.

**משפט 1.6** בהנחות וסימונים הללו, המרכיבים האיזוטיפיים של $V$ תלויים רק במודול $V$, ולא בפירוק.

**הוכחה:** נסמן את המרכיבים האיזוטיפיים לפי הפירוק השני:

$$\begin{aligned} Z_1 &= W_1 \oplus \cdots \oplus W_{i_1} \\ &\vdots \\ Z_r &= W_{i_1+\cdots+i_{r-1}+1} \oplus \cdots \oplus W_{i_1+\cdots+i_r} \end{aligned}$$

נסמן כעת $P_i : V \to W_i$ את ההטלה על $W_i$, כך שמתקיים $P_i\left(W_j\right) = 0$ לכל $i \neq j$. זהו הומומורפיזם של מודולים. כמובן $P_i\left|_{V_j} \in \mathrm{Hom}_L\left(V_j, W_i\right)\right.$, ולכן, מהלמה של שור, אם $V_j \ncong V_i$ אזי $P_i\left(V_j\right) = 0$. כמו כן, $P_i\left(V_j\right) \subset Z_s$ כאשר $i, j$ אינדקסים שמופיעים בקבוצת האינדקסים

$$\left\{i_1 + \cdots + i_{s-1} + 1, \ldots, i_1 + \cdots + i_s\right\}$$

כעת, נסמן $Q_j : V \to Z_j$ את ההטלה אל $Z_j$ שמתאפסת על $Z_i$ לכל $i \neq j$. לפי מה שהסברנו עכשיו, ברור כי $Q_j\left(U_i\right) = 0$ לכל $i \neq j$ כמו כן. כעת, יהי $u \in U_j$. נפרק את $u$ לפי הפירוק השני:

$$u = Q_1(u) + \cdots + Q_r(u) = Q_j(u) \in Z_j$$

ולכן $U_j \subseteq Z_j$. באופן סימטרי נקבל את ההכלה השנייה, וסיימנו. ■

**משפט 1.7** תהי $\pi$ הצגה פריקה לחלוטין של $L$ במרחב $V$. נניח כי מספר המרכיבים האי־פריקים סופי. נקבע פירוק

$$V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_n$$

לתת מודולים אי פריקים, ויהי $U \subsetneq V$ תת מודול. אזי קיים תת מודול $Y \subset V$ המקיים $V = U \oplus Y$. אפשר לבחור את $Y$ להיות סכום ישר של חלק מבין $\{V_i\}_{i=1}^n$.

**הוכחה:** נתבונן בתתי המודולים $U \cap V_i$ ־ שהם תתי מודולים של $V_i$. הואיל ולקחנו את $V_i$ להיות אי פריקים, נקבל כי $U \cap V_i \in \{0, V_i\}$. כלומר ־ $V_i \subset U$ או $U \cap V_i = 0$. קיים $i$ עבורו $V_i \not\subset U$ שכן לקחנו $U \subsetneq V$, ואז $U \cap V_i = 0$. יהי $i_1$ הראשון עבורו מתקיים $U \cap V_{i_1} = 0$ ־ כלומר $U + V_{i_1}$ הוא סכום ישר. לכל $i \leq i_1$ מתקיים $V_i \subset U + V_{i_1}$. בדיוק כמו קודם, לכל $i > i_1$ מתקיים $V_i \subset U + V_{i_1}$ או $(U + V_{i_1}) \cap V_i = 0$. אם הראשון מתקיים לכל $i > i_1$, נקבל $V = U \oplus V_{i_1}$, וניקח $Y = V_{i_1}$ ונסיים. אחרת, ניקח את $i_2$ להיות האינדקס הראשון עבורו השני מתקיים ־ אזי $U + V_{i_1} + V_{i_2}$ הוא סכום ישר. נמשיך כך, ומסופיות הפירוק התהליך חייב להסתיים ־ ולבסוף נקבל

$$V = U \oplus V_{i_1} \oplus \cdots \oplus V_{i_k}$$

ונבחר

$$Y = V_{i_1} \oplus \cdots \oplus V_{i_k}$$

■

בתרגיל הבית נראה הכללה של המשפט הזה לפירוק אינסופי, וכן נראה שהתכונה הזו מגדירה פריקות לחלוטין ־ אם היא מתקיימת, אזי המודול פריק לחלוטין.

# 2 פתירות ונילפוטנטיות באלגבראות לי

## 2.1 הגדרות ודוגמאות

**הגדרה 2.1** תהי $L$ אלגברת לי מעל $F$. נגדיר את **הסדרה המרכזית היורדת** של $L$ להיות

$$\begin{aligned} L_0 &= L \\ L_1 &= [L, L_0] = [L, L] \\ L_2 &= [L, L_1] = [L, [L, L]] \\ &\vdots \\ L_{i+1} &= [L, L_i] \end{aligned}$$

**טענה 2.2** השרשרת $L = L_0 \supset L_1 \supset L_2 \supset \ldots$ היא שרשרת יורדת של אידאלים של $L$, כך שלכל $i$ מתקיים

$$L_i/L_{i+1} \subseteq Z\left(L/L_{i+1}\right)$$

**הוכחה:** כזכור, ראינו כי עבור שני אידאלים $I, J \subset L$, הקומוטטור $[I, J] \subset L$ הוא אידאל. לכן $L_1 = [L, L]$ הוא אידאל. באינדוקציה, $L_i$ הוא אידאל לכל $i$. גם את ההכלות נראה באינדוקציה ־ בבירור $L_1 \subset L_0$. אם $L_i \subset L_{i-1}$, אזי $L_{i+1} = [L, L_i] \subset [L, L_{i-1}] = L_i$.
נותר להראות את הטענה על המרכזים ־ יהי $x \in L_i$. אזי לכל $y \in L$ מתקיים

$$[y, x] \in [L, L_i] = L_{i+1}$$

ולכן

$$[y + L_{i+1}, x + L_{i+1}] = L_{i+1}$$

לכל $y \in L$, ועל כן נקבל כי

$$x + L_{i+1} \in Z\left({}^{L}/_{L_{i+1}}\right)$$

■

**הגדרה 2.3** נגדיר את **הסדרה הנגזרת** של $L$ להיות

$$\begin{aligned} L^{(0)} &= L \\ L^{(1)} &= \left[L^{(0)}, L^{(0)}\right] = [L, L] \\ L^{(2)} &= \left[L^{(1)}, L^{(1)}\right] = [[L, L], [L, L]] \\ &\vdots \\ L^{(i+1)} &= \left[L^{(i)}, L^{(i)}\right] \end{aligned}$$

**טענה 2.4** השרשרת $L = L^{(0)} \supset L^{(1)} \supset L^{(2)} \supset \ldots$ היא סדרה יורדת של אידאלים, כך שלכל $i$ המנה ${}^{L^{(i)}}/_{L^{(i+1)}}$ היא אבלית (כלומר הקומוטטור הוא זהותית 0). כמו כן, $L^{(i)} \subset L_i$ לכל $i$.

ההוכחה לחלוטין אנלוגית לקודמת.

**הגדרה 2.5** תהי $L$ אלגברת לי מעל שדה $F$.

1. נאמר כי $L$ **נילפוטנטית** אם קיים $n$ עבורו $L_n = 0$.
2. נאמר כי $L$ **פתירה** אם קיים $n$ עבורו $L^{(n)} = 0$.

**טענה 2.6** אם $L$ נילפוטנטית אזי $L$ פתירה.

**הוכחה:** נניח כי $L_n = 0$. כיוון שמתקיים $L^{(n)} \subset L_n = 0$, נקבל כי $L^{(n)} = 0$. ■

**דוגמאות**

1. אלגברת לי אבלית (מרחב וקטורי) היא כמובן נילפוטנטית.

2. אלגברת לי פשוטה $L$ היא בהכרח לא פתירה, שכן לפי הגדרה $[L,L]\neq 0$, ולכן $L^{(1)}=[L,L]=L$. כך נוכל להראות באינדוקציה כי $L^{(i)}=L$ לכל $i$. למשל, האלגברה $\mathrm{sl}\left(2,F\right)$ אינה פתירה.

3. ניקח $L=\mathcal{B}\left(n,F\right)\subset\mathrm{gl}\left(n,F\right)$ ונראה שהיא פתירה, אך לא נילפוטנטית. נראה ראשית כי

$$[L,L]=n\left(n,F\right)$$

ההכלה $\subset$ ברורה. בכיוון השני, ניקח את $e_{ij}$ להיות המטריצה מגודל $n\times n$ שיש לה 1 בקואורדינטה $(i,j)$ ובכל קואורדינטה אחרת 0. כמובן,

$$e_{i,j}e_{r,s}=\delta_{j,r}e_{i,s}$$

כעת, עבור $i\neq j$ מתקיים

$$[e_{i,i},e_{i,j}]=e_{i,i}e_{i,j}-e_{i,j}e_{i,i}=e_{i,j}-0=e_{i,j}$$

כיוון שהקבוצה $\{e_{i,j}\}_{i<j}$ היא בסיס של $n\left(n,F\right)$ נקבל את ההכלה השנייה וממנה את השוויון. יתר על כן, קיבלנו כי $[d\left(n,F\right),n\left(n,F\right)]=n\left(n,F\right)$. אם כן, נקבל כי

$$[\mathcal{B}\left(n,F\right),n\left(n,F\right)]=n\left(n,F\right)$$

וכעת

$$L_2=[L,L_1]=[\mathcal{B}\left(n,F\right),n\left(n,F\right)]=n\left(n,F\right)$$

ועל כן לכל $n>1$ נקבל $L_n=n\left(n,F\right)$, כלומר $L$ לא נילפוטנטית. לעומת זאת, מכפל מטריצות ידוע לנו כי עבור $u_1,\ldots,u_k\in n\left(n,F\right)$ אזי בכפל $u_1\cdots u_k$ יש $k$ אלכסונים רצופים (מתחילים בראשי ועולים למעלה) של אפסים. על כן, נקבל כי

$$L^{(2)}=\left[L^{(1)},L^{(1)}\right]=[n\left(n,F\right),n\left(n,F\right)]$$

וכן הלאה. אם $2^{k-1}\geq n$ נקבל כי בהכרח $L^{(k)}=0$, כי בקומוטטורים המגדירים אותה יהיו $2^{k-1}$ מוכפלים בכל מחובר, ולכן כולם מתאפסים. כמו כן, רואים כי $n\left(n,F\right)$ כמובן נילפוטנטית.

**הערה 2.7** 1. נניח כי $f:L\to M$ הומומורפיזם על של אלגבראות לי. אזי

$$f\left(L_i\right)=M_i$$
$$f\left(L^{(i)}\right)=M^{(i)}$$

ועל כן אם $L$ נילפוטנטית (בהתאמה, פתירה) אז גם $M$ נילפוטנטית (בהתאמה, פתירה).

2. נניח כי $R \subset L$ תת אלגברת לי. אזי

$$R_i \subset L_i$$
$$R^{(i)} \subset L^{(i)}$$

ועל כן אם $L$ נילפוטנטית (בהתאמה, פתירה) אז גם $R$ נילפוטנטית (בהתאמה, פתירה).

3. יהי $I \subset L$ אידאל. אזי $L$ פתירה אם ורק אם $I$ פתיר וגם $L/I$ פתירה. אם $L$ פתירה, שניהם נובעים בקלות מההערות הקודמות. להיפך, נניח כי $(L/I)^{(n)} = 0$. כמובן, מתקיים $\nu\left(L^{(n)}\right) = (L/I)^{(n)}$ כאשר $\nu : L \to L/I$ ההומומורפיזם הטבעי. לכן $L^{(n)} \subset I$. כיוון שגם $I$ פתיר, יש $m$ עבורו $I^{(m)} = 0$, ואז $L^{(n+m)} = 0$.

4. נניח כי $L/Z(L)$ נילפוטנטית. אזי $L$ נילפוטנטית, שכן אם $(L/Z(L))_n = 0$, אזי $L_n \subset Z(L)$, כלומר $L_{n+1} = [L, L_n] = 0$.

5. נניח כי $L$ נילפוטנטית. אזי $Z(L) \neq 0$, שכן אם נניח כי $L_n = 0$ וכן $L_{n-1} \neq 0$, נקבל כי

$$0 = L_n = [L, L_{n-1}]$$

כלומר $0 \neq L_{n-1} \subset Z(L)$ וסיימנו.

6. יהיו $I, J \subset L$ אידאלים פתירים. אזי $I + J$ פתיר. נשתמש באיזומורפיזם

$$I+J/J \cong I/I\cap J$$

של מודולים מעל $L$ וגם של אלגבראות לי. $I$ פתיר, ולכן אגף ימין פתיר כתמונה הומומורפית של $I$ (לפי סעיף 1). לכן אגף שמאל פתיר, והרי גם $J$ פתיר, ועל כן, מסעיף 3, גם $I + J$ פתיר.

7. תרגיל: יהיו $I, J \subset L$ אידאלים נילפוטנטיים. אזי $I + J$ אידאל נילפוטנטי.

**מסקנה 2.8** (מסעיף 6) תהי $L$ אלגברת לי ממימד סופי מעל $F$. אז יש בתוך $L$ אידאל פתיר מקסימלי יחיד - הוא מכיל כל אידאל פתיר של $L$.

**הוכחה:** יהי $S \subset L$ אידאל פתיר בעל מימד מקסימלי, ויהי $I \subset L$ אידאל פתיר. לפי סעיף 6 קודם נקבל כי $I + S$ הוא אידאל פתיר המכיל את $S$. ממקסימליות המימד של $S$ נקבל כי $I + S = S$, כלומר $I \subset S$. ■

**הגדרה 2.9** תהי $L$ אלגברת לי ממימד סופי מעל $F$. האידאל מהמסקנה האחרונה ייקרא **הרדיקל** של $L$, ויסומן $\mathrm{Rad}(L)$.

אומרים כי $L$ **פשוטה למחצה** (**Semisimple**) כאשר $\mathrm{Rad}(L) = 0$.

כמובן, $L$ פתירה אם ורק אם $L = \mathrm{Rad}(L)$. באופן כללי, האלגברה $L/\mathrm{Rad}(L)$ היא פשוטה למחצה, שכן אידאל פתיר במנה הוא מהצורה $I/\mathrm{Rad}(L)$, כאשר $\mathrm{Rad}(L) \subset I \subset L$ אידאל. $I$ עצמו פתיר בגלל סעיף 3 בהערות קודם ($\mathrm{Rad}(L)$ פתיר וכן $I/\mathrm{Rad}(L)$ פתירה). אם כן, $I = \mathrm{Rad}(L)$ מהגדרת הרדיקל, ולכן $I/\mathrm{Rad}(L) = 0$ באלגברת המנה $L/\mathrm{Rad}(L)$.

**טענה 2.10** תהי $L$ אלגברת לי ממימד סופי. התנאים הבאים שקולים:

1. $L$ פתירה.
2. קיימת סדרה יורדת של תת אלגבראות לי $L=R_m\supset R_{m-1}\supset\cdots\supset R_1\supset R_0=0$, כאשר $R_i$ אידאל מקו־מימד 1 בתוך $R_{i+1}$ (כלומר $\dim\left({}^{R_{i+1}}/_{R_i}\right)=1$).

**הוכחה:** נניח כי $L$ פתירה. יש לנו את הסדרה הנגזרת

$$L=L^{(0)}\supset L^{(1)}\supset\cdots\supset L^{(n-1)}\supset L^{(n)}=0$$

נשים לב כי כל תת מרחב וקטורי $[L,L]\subset U\subset L$ הוא בהכרח אידאל ־ שכן אם $x\in L,u\in U$, אזי

$$[x,u]\in[L,L]\subset U$$

$L$ פתירה, ולכן $L\subsetneq[L,L]$. יהיו $x_0,x_1,\ldots,x_{i_1-1}\in L$ בלתי תלויים לינארית מעל $F$ המקיימים

$$L=Fx_0\oplus Fx_1\oplus\cdots\oplus Fx_{i_1-1}\oplus L^{(1)}$$

כעת נגדיר

$$R_1=Fx_1\oplus\cdots\oplus Fx_{i_1-1}\oplus L^{(1)}$$
$$\vdots$$
$$R_{i_1-1}=Fx_{i_1-1}\oplus L^{(1)}$$
$$R_{i_1}=L^{(1)}$$

אלה כולם אידאלים של $L$, ומהבנייה נקבל כי $R_{j+1}$ הוא מקו־מימד 1 בתוך $R_j$. נחזור על התהליך כאשר $L^{(1)}$ במקום $L$, $L^{(2)}$ במקום $L^{(1)}$. נקבל סדרת אידאלים בתוך $L_1$

$$L_1=R_{i_1}\supset R_{i_1+1}\supset\cdots\supset R_{i_2}=L^{(2)}$$

והתהליך הזה כמובן חייב להסתיים. כעת נראה את הכיוון השני ־ נניח קיום סדרת אידאלים כזו. מהנתון ברור כי $\dim_F R_i=i$. לכן, $R_1$ פתיר, כי $\dim R_1=1$ (ולכן $R_1$ אבלית). גם ${}^{R_2}/_{R_1}$ פתירה (כי גם היא ממימד 1), ולכן $R_2$ פתיר. באינדוקציה, נקבל כי $R_m=L$ גם כן פתיר. ■

## 2.2 משפט לי

תהי $L$ אלגברת לי. תהי $R\subset L$ תת אלגברת לי, יהי $V$ מודול מעל $L$ ויהי $\lambda\in R^*$. נגדיר

$$V_\lambda=\{v\in V\mid x\cdot v=\lambda(x)\,v\forall x\in R\}$$

אם ניקח את $\pi$ להיות ההצגה המתאימה למודול $V$, נקבל

$$V_\lambda=\{v\in V\mid \pi(x)(v)=\lambda(x)\,v\forall x\in R\}$$

נשים לב שאם $v\in V_\lambda$ נקבל

$$\pi([x,y])\,v=\lambda([x,y])\,v$$
$$\pi([x,y])\,v=\pi(x)\,\pi(y)\,v-\pi(y)\,\pi(x)\,v=\lambda(x)\,\lambda(y)\,v-\lambda(y)\,\lambda(x)\,v=0$$

כלומר $\lambda$ חייב להתאפס על כל קומוטטור (אם $V_\lambda$ לא ריק). נשים לב כמובן כי $V_\lambda$ הוא תת מודול מעל $R$.

**משפט 2.11** תהי $L$ אלגברת לי מעל $F$ (נניח כי $\mathrm{char}F=0$). יהי $V$ מודול ממימד סופי מעל $L$ ($\pi$ ההצגה המתאימה), יהי $J\subset L$ אידאל, ויהי $\lambda\in J^*$. נתבונן במרחב $V_\lambda$ המתאים:

$$V_\lambda=\{v\in V\mid \pi(x)(v)=\lambda(x)v\forall x\in J\}$$

אזי $V_\lambda\subset V$ הוא תת מודול.

**הוכחה:** נניח כי $V_\lambda\neq 0$, כי אחרת אין מה להוכיח. יהי $x\in L$, ונרצה להראות כי $\pi(x)(V_\lambda)\subset V_\lambda$. נקח $0\neq v_0\in V_\lambda$. צריך להראות כי לכל $y\in J$ מתקיים

$$\pi(y)(\pi(x)(v_0))=\lambda(y)\pi(x)(v_0)$$

נסמן $v_i=\pi(x)^i(v_0)$. יהי $k$ הטבעי הגדול ביותר עבורו $\{v_0,v_1,\ldots,v_k\}$ בלתי תלויה לינארית. נתבונן בתת המרחב שקבוצה זו פורשת ונסמנו $V'$. נראה כי $V'$ אינווריאנטי לפעולת $J$. יהי $y\in J$. אזי

$$\begin{aligned}
\pi(y)v_0&=\lambda(y)v_0\\
\pi(y)v_1&=\pi(y)\pi(x)v_0=\pi(x)\pi(y)v_0+\pi([y,x])v_0=\\
&=\lambda(y)v_1+\lambda([y,x])v_0\\
&\ \vdots\\
\pi(y)v_{i+1}&=\pi(y)\pi(x)v_i+\pi([y,x])v_i
\end{aligned}$$

נמשיך בפעם הבאה. ■