אלגבראות לי

ⓒ ארזים

11 במרץ 2019

1 מושגים ראשונים

1.1 חבורות לי לינאריות

נמשיך מהמקום שעצרנו.

משפט 1.1 תהי $G \subset \mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ תת חבורה סגורה. נגדיר

$$L = \{X \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C}) \mid \exp(tX) \in G \forall t \in \mathbb{R}\}$$

אזי $L \subset \mathrm{gl}_n(\mathbb{C})$ היא תת־אלגברת לי.

הוכחה: ראינו כי בהינתן $X, Y \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ יש $\varepsilon_0 > 0$ כך שלכל $t \in \mathbb{R}$ עם $|t| < \varepsilon_0$ מתקיים

$$\exp(tX) \cdot \exp(tY) = \exp\left(t(X+Y) + \frac{t^2}{2}[X,Y] + \sum_{j=3}^{\infty} t^j F_j(X,Y)\right)$$

כאשר $F_j(X,Y)$ הוא פולינום לא קומוטטיבי במשתנים X, Y הומוגני מדרגה j. כעת, יהי $t \in \mathbb{R}$ כלשהו. ניקח k טבעי עבורו $\left|\frac{t}{k}\right| < \varepsilon_0$, ונקבל כי

$$\left(\exp\left(\frac{t}{k}X\right)\exp\left(\frac{t}{k}Y\right)\right)^k = \left(\exp\left(\frac{t}{k}(X+Y) + \sum_{j=2}^{\infty}\frac{t^j}{k^j}F_j(X,Y)\right)\right)^k =$$
$$= \exp\left(t(X+Y) + \sum_{j=2}^{\infty}\frac{t^j}{k^{j-1}}F_j(X,Y)\right) \xrightarrow{k\to\infty} \exp(t(X+Y))$$

כעת יהיו $X, Y \in L$. כיוון שמתקיים $\exp\left(\frac{t}{k}X\right), \exp\left(\frac{t}{k}Y\right) \in G$ לכל k (ולכל t), מתקיים גם $\left(\exp\left(\frac{t}{k}X\right)\exp\left(\frac{t}{k}Y\right)\right)^k \in G$, וכיוון שלקחנו G סגורה בתוך $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ נסיק כי לכל $t \in \mathbb{R}$ מתקיים

$$\exp(t(X+Y)) \in G$$

ולכן בפרט $X + Y \in L$. מכאן נקבל כי L מרחב וקטורי מעל $\mathbb{R}$. L סגורה ביחס להצמדה על ידי איברי G, כי אם $X \in L$, $g \in G$ אזי

$$G \ni g \cdot \exp(tX) \cdot g^{-1} = \exp\left(t\left(gXg^{-1}\right)\right)$$

לכל $t \in \mathbb{R}$, ולכן $gXg^{-1} \in L$. יהיו $X, Y \in L$. נסמן

$$f(t) = \exp(tX) Y \exp(tX)^{-1}$$

ונשים לב כי $f(t) \in L$ לכל $t \in \mathbb{R}$. נגזור:

$$\begin{aligned} f'(t) &= \exp(tX) X \cdot Y \exp(-tX) - \exp(tX) Y X \exp(-tx) = \\ &= \exp(tX) [X, Y] \exp(-tX) \end{aligned}$$

נציב $t = 0$ ונקבל

$$f'(0) = [X, Y]$$

ניזכר כי כפי שראינו בפעם הקודמת,

$$f'(0) = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} (\exp(tX) Y \exp(-tX) - Y)$$

כל האיברים בגבול בצד ימין נמצאים מתוך L, ולכן גם הגבול שלהם. בסך הכל קיבלנו כי $[X, Y] \in L$, כלומר L היא אכן תת־אלגברת לי. ∎

1.2 אידאלים, הומומורפיזם ועוד

תהי L אלגברת לי מעל F. לתת מרחבים $U, V \subset L$ נסמן

$$[U, V] = \mathrm{Span}_F \{[u, v] \mid u \in U, v \in V\}$$

הגדרה 1.2 תת־מרחב $J \subset L$ ייקרא **אידאל** (של L) אם $[J, L] \subset J$.

- תמיד קיימים האידאלים הטריביאליים ־ $0, L$.
- סכום של אידאלים $I + J$ הוא כמובן אידאל.
- קומוטטור של אידאלים $[I, J]$ הוא גם כן אידאל ־ נראה את זה: יהיו $i \in I, j \in J, x \in L$ כלשהם. ניקח

$$[x, [i, j]] = [[x, i], j] + [i, [x, j]] \in [I, J]$$

  בפרט, אם ניקח $[L, L]$ נקבל אידאל.
- יהי $f : L_1 \to L_2$ הומומורפיזם של אלגבראות לי. אזי $\ker f \subset L_1$ הוא אידאל: אם $x \in \ker f, y \in L_1$ נקבל

$$f([x, y]) = [f(x), f(y)] = [0, f(y)] = 0$$

באופן כללי, אם $L \supset J$ אידאל, אז מוגדר מרחב המנה L/J. יש עליו מבנה של אלגברת לי לפי

$$[x+J, y+J] = [x,y]+J$$

וזה מוגדר היטב כי J אידאל. כמובן שכעת מתקיימים משפטי ההומומורפיזם ־ למשל בדוגמה מהנקודה האחרונה קודם,

$$\begin{aligned} L_1/\ker f &\simeq \mathrm{Im} f \\ x+\ker f &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

כאיזומורפיזם של אלגבראות לי. כמו כן, יש התאמה חד־חד־ערכית ועל בין האידיאלים $\ker f \subset I \subset L_1$ ובין האידאלים $J \subset \mathrm{Im} f$, על ידי

$$\begin{aligned} I &\mapsto f(I) \\ f^{-1}(J) &\leftarrow J \end{aligned}$$

כאשר $L \supset J$ אידאל, ההומומורפיזם הטבעי

$$\begin{aligned} \nu(x) : L &\to L/j \\ \nu(x) &= x+J \end{aligned}$$

הוא הומומורפיזם על של אלגבראות לי.

דוגמא ראינו כי

$$\begin{aligned} \mathrm{ad} : L &\to \mathrm{Der}(L) \subset \mathrm{gl}(L) \\ \mathrm{ad}x(y) &= [x,y] \end{aligned}$$

הומומורפיזם של אלגבראות לי. אזי

$$\begin{aligned} \ker(\mathrm{ad}) &= \{x \in L \mid \mathrm{ad}x = 0\} = \\ &= \{x \in L \mid \forall y \in L\, [x,y] = 0\} \end{aligned}$$

זהו אידאל של L שנקרא גם **המֶרְכָּז** של L, ונסמנו $\mathcal{Z}(L)$. בהינתן $L \supset H$ תת־אלגברת לי, נגדיר בנוסף גם את $C_L(H)$, או **המְרַכֵּז** של H, להיות התת־אלגברה הבאה:

$$C_L(H) = \{x \in L \mid [x,h] = 0 \forall h \in H\}$$

וכן את $N_L(H)$, או ה**נורמליזטור** (מנרמל) של H, להיות

$$N_L(H) = \{x \in L \mid [x,h] \in H \forall h \in H\}$$

כמובן, H אידאל בתוך $N_L(H)$.

הגדרה 1.3 L תקרא אלגברת לי **פשוטה** אם $[L,L] \neq 0$, ואין אידאלים לא טריביאליים בתוך L.

דוגמא $\mathrm{sl}(2,F)$ פשוטה ($\mathrm{char}(F)\neq 2$). ניזכר כי יש לנו הבסיס

$$e=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},f=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},h=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$$

וכי ראינו שמתקיים

$$[h,e]=2e,[h,f]=-2f,[e,f]=h$$

כעת, יהי $0\neq I\subset\mathrm{sl}(2,F)$ אידאל. יהי $0\neq ae+bf+ch\in I$, וניקח עליו קומוטטור עם e:

$$a\cdot 0+b\cdot h-2c\cdot e\in I$$

נעשה זאת שוב:

$$-2b\cdot e\in I$$

באותה צורה ניקח קומוטטור עם f פעמיים:

$$\begin{aligned}-ah+2cf&\in I\\2af&\in I\end{aligned}$$

לכן, אם $a\neq 0$ או $b\neq 0$, נקבל כי אחד מבין e,f נמצא בתוך I, ולכן $[e,f]=h\in I$, אבל אז גם $[h,e]=2e\in I,[h,f]=-2f\in I$ ולכן $I=\mathrm{sl}(2,F)$ (היא הוא מכיל את הבסיס). כמובן שאם $a=b=0$ אזי $c\neq 0$, ולכן $h\in I$ שוב. לכן קיבלנו שבכל מקרה $I=\mathrm{sl}(2,F)$.

1.2.1 אוטומורפיזמים

נניח כי $L\subset\mathrm{gl}(V)$ תת־אלגברת לי (לינארית). נתבונן בפעולת ההצמדה על $\mathrm{gl}(V)$ על ידי $g\in\mathrm{GL}(V)$:

$$X\mapsto gXg^{-1}$$

נניח (בהינתן g מסויים) שמתקיים $gLg^{-1}=L$. אזי ההצמדה באיבר g היא אוטומורפיזם של L: עבור $x,y\in L$ נקבל

$$g[x,y]g^{-1}=g(xy-yx)g^{-1}=\left(gxg^{-1}\right)\left(gyg^{-1}\right)-\left(gyg^{-1}\right)\left(gxg^{-1}\right)=\left[gxg^{-1},gyg^{-1}\right]$$

למשל ניקח $L=\mathrm{sl}(n,F)\subset\mathrm{gl}(n,F)$. ידוע לנו כי עקבה נשמרת על ידי הצמדה, ולכן הצמדה בכל מטריצה $g\in\mathrm{GL}_n(F)$ תשמר את $\mathrm{sl}(n,F)$.

כעת, נניח כי $\mathrm{char}F=0$, ותהי L אלגברת לי. נניח כי $\delta\in\mathrm{Der}(L)$ ונניח כי δ היא אנדומורפיזם נילפוטנטי, כלומר יש k טבעי עבורו $\delta^k=0$. נגדיר

$$\exp(\delta)=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{j!}\delta^j=\sum_{j=0}^{k-1}\frac{1}{j!}\delta^j$$

זאת העתקה לינארית הפיכה $L \to L$. נראיה כי $\exp(\delta)$ היא אוטומורפיזם. מתקיים

$$\exp(\delta)([x,y]) = \sum_{j=0}^{k-1} \frac{1}{j!}\delta^j([x,y])$$

מכלל לייבניץ נקבל

$$\begin{aligned}
&= \sum_{j=0}^{k-1} \frac{1}{j!} \sum_{r=0}^{j} \binom{j}{r} \left[\delta^r(x), \delta^{j-r}(y)\right] = \\
&= \sum_{j=0}^{k-1} \sum_{r=0}^{j} \left[\frac{\delta^r(x)}{r!}, \frac{\delta^{j-r}(y)}{(j-r)!}\right] = \\
&= \sum_{j=0}^{k-1} \sum_{r+i=j} \left[\frac{\delta^r(x)}{r!}, \frac{\delta^i(y)}{i!}\right] = \\
&= \left[\sum_{r=0}^{k-1} \frac{\delta^r(x)}{r!}, \sum_{i=0}^{k-1} \frac{\delta^i(y)}{i!}\right] = [\exp\delta(x), \exp\delta(y)]
\end{aligned}$$

את המעבר לשורה האחרונה צריך להסביר - הוספנו לכאורה מחוברים. נסתכל על

$$\sum_{r+i=m\geq k} \left[\frac{\delta^r(x)}{r!}, \frac{\delta^i(y)}{i!}\right] = \frac{1}{m!}\sum_{r=0}^{k}\binom{m}{r}\left[\frac{\delta^r(x)}{r!}, \frac{\delta^{m-r}(y)}{(m-r)!}\right] = \frac{1}{m!}\delta^m([x,y]) = 0$$

שכן $m \geq k$ ומתקיים $\delta^k = 0$.

בפרט נניח כי $x \in L$ עבורו $\mathrm{ad}x$ היא נילפוטנטית - כלומר, לכל $y \in L$ מתקיים

$$[x,[x,[x,\ldots,[x,y]\ldots]]] = 0$$

אזי

$$\exp(\mathrm{ad}x) = \sum_{j=0}^{k-1}\frac{1}{j!}\mathrm{ad}^j x$$

הוא אוטומורפיזם של L ונקרא אוטומורפיזם **פנימי** של L.

נקבל שתי חבורות חדשות: $\mathrm{Aut}(L)$ היא חבורת כל האוטומורפיזמים של L. החבורה $\mathrm{Int}(L) < \mathrm{Aut}(L)$ היא תת החבורה הנוצרת על ידי כל האוטומורפיזמים הפנימיים של L.

טענה 1.4 $\mathrm{Int}(L) \lhd \mathrm{Aut}(L)$.

הוכחה: יהי $\phi \in \mathrm{Aut}(L)$ ויהי $x \in L$ עבורו $\mathrm{ad}x$ נילפוטנטי. מתקיים

$$\phi\exp(\mathrm{ad}x)\phi^{-1} = \sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{j!}\left(\phi\mathrm{adx}\phi^{-1}\right)^j$$

כעת, מתקיים

$$\left(\phi \mathrm{ad} x \phi^{-1}\right)(y)=\phi\left(\mathrm{ad} x\left(\phi^{-1}(y)\right)\right)=\phi\left(\left[x, \phi^{-1}(y)\right]\right)=[\phi(x), y]=\mathrm{ad}(\phi(x))(y)$$

ולכן נקבל כי

$$\phi \mathrm{ad} x \phi^{-1}=\mathrm{ad}(\phi(x))$$

ומכאן

$$\phi \exp (\mathrm{ad} x) \phi^{-1}=\exp (\mathrm{ad}(\phi(x))) \in \operatorname{Int}(L)$$

■

דוגמא נניח כי $L=\mathrm{gl}(n, F)$ ותהי $X \in \mathrm{gl}(n, F)$ מטריצה נילפוטנטית, כלומר יש k טבעי עבורו $X^k=0$. נחשב את $\exp(\mathrm{ad} X)$. נכתוב

$$\mathrm{ad} X(Y)=XY-YX=\lambda_X(Y)+\rho_{-X}(Y)$$

כאשר

$$\lambda_X(Y)=XY$$
$$\rho_X(Y)=YX$$

ברור כי מתקיים

$$\lambda_X \rho_{-X}=\rho_{-X} \lambda_X$$

ולכן

$$\exp (\mathrm{ad} X)=\exp \left(\lambda_X+\rho_{-X}\right)=\exp \lambda_X \exp \rho_{-X}$$

נציב מטריצה Y ונקבל

$$\exp (\mathrm{ad} X)(Y)=\exp \lambda_X \exp \rho_{-X}(Y)$$

על ידי פתיחת סוגריים פשוטה נקבל כי

$$\exp (\mathrm{ad} X)(Y)=\exp \lambda_X\left(\exp \rho_{-X}(Y)\right)=\exp X \cdot Y \cdot \exp (-X)$$

כלומר, $\exp(\mathrm{ad} X)$ היא למעשה הצמדה של $\exp X$.

1.3 מודולים והצגות

הגדרה 1.5 תהי L אלגברת לי מעל F. יהי V מרחב ווקטורי מעל F. נאמר כי V **מודול** מעל L אם יש פעולה של L על V, שנסמנה $x \cdot v \in V$ עבור $x \in L, v \in V$ (ונקרא לה כפל), כך שהכפל הזה בי־לינארי מעל F, וכך שלכל $x, y \in L, v \in V$ מתקיים

$$[x, y] \cdot v=x \cdot(y \cdot v)-y \cdot(x \cdot v)$$

בהתאמה, נגדיר **הצגה** של L במרחב ווקטורי V בתור הומומורפיזם של אלגבראות לי

$$\pi: L \rightarrow \mathrm{gl}(V)$$

נניח כי V מודול מעל L. נגדיר את

$$\pi : L \to \mathrm{gl}(V)$$
$$\pi(x)(v) = x \cdot v$$

אז π הצגה של L במרחב V לפי התכונות של מודול - למשל,

$$\pi([x,y])(v) = [x,y] \cdot v = x \cdot (y \cdot v) - y \cdot (x \cdot v) = \pi(y)(\pi(x)(v)) - \pi(x)(\pi(y)(v)) = \\ = [\pi(x), \pi(y)](v)$$

בכיוון השני, תהי $\pi : L \to \mathrm{gl}(V)$ הצגה של L. אזי V מודול מעל L לפי הכפל

$$x \cdot v = \pi(x)(v)$$

הגדרה 1.6 יהי V מודול מעל L. תת מודול $W \subset V$ הוא תת מרחב של V שהוא גם מודול מעל L בעצמו ביחס לאותה פעולה (W הוא תת מרחב של V שסגור לכפל באיברי L). בלשון הצגות, $W \subset V$ הוא תת מרחב אינווריאנטי לכל האופרטורים $\{\pi(x) \mid x \in L\}$.

W מגדיר הצגה של L במרחב W, שנסמנה π^W, על ידי

$$\pi^W(x) = \pi(x)|_W$$

על המרחב V/W יש מבנה של מודול מעל L (מודול מנה):

$$x \cdot (v + W) = x \cdot v + W$$

בהתאמה, יש לנו את הצגת המנה של L במרחב V/W. כמובן שגם הומומורפיזמים של מודולים מוגדרים באופן טבעי:

$$f : V_1 \to V_2$$

הומומורפיזם אם f היא העתקה לינארית ששומרת גם על הפעולה, כלומר

$$f(x \cdot v_1) = x \cdot f(v_1)$$

הגרעין והתמונה של הומומורפיזם הם כמובן תתי מודולים, ומשפטי ההומומורפיזמים מתקיימים.

הגדרה 1.7 מודול מעל L יקרא **אי־פריק** (**Irreducible**) אם אין לו תת מודולים לא טריביאליים. ההצגה המתאימה תקרא גם היא הצגה **אי־פריקה**.

הגדרה 1.8 מודול V מעל L ייקרא **פריק לחלוטין** (**Completely Reducible** או **Semisimple**) אם V הוא סכום ישר של תת מודולים אי־פריקים. ההצגה המתאימה תיקרא גם היא **פריקה לחלוטין**.

אם נפרט, הכוונה בהגדרה הפריקות לחלוטין היא שיש קבוצה $\{V_\alpha\}_{\alpha \in S}$ של תת מודולים אי פריקים של V עבורה

$$V = \bigoplus_{\alpha \in S} V_\alpha$$

כלומר לכל $v \in V$ קיימת תת קבוצה $S_v \subset S$ סופית עבורה

$$v \in \bigoplus_{\alpha \in S_V} V_\alpha$$

1.3.1 דוגמאות ובניות כלליות של מודולים

1. הרחבת סקלרים: תהי L אלגברת לי מעל F. יהי $F\subset K$ שדה הרחבה, ויהי V מודול מעל L. כזכור יש לנו את $L_K=L\otimes_F K$ שהיא אלגברת לי מעל K. נגדיר

$$V_K=V\otimes_F K$$

וזהו מרחב ווקטורי מעל K. כעת, V_K הוא מודול מעל L_K. נראה זאת בקיצור ־ רק את הפעולה. עבור $x\in L,v\in V,t,s\in K$ נגדיר

$$(x\otimes t)\cdot(v\otimes s)=x\cdot v\otimes ts$$

כעת,

$$\begin{aligned}
[x_1\otimes t_1,x_2\otimes t_2]\cdot(v\otimes s)&=([x_1,x_2]\otimes t_1t_2)(v\otimes s)=\\
&=[x_1,x_2]\cdot v\otimes ts=\\
&=(x_1\cdot(x_2\cdot v)-x_2\cdot(x_1\cdot v))\otimes ts=\\
&=(x_1\otimes t_1)\cdot((x_2\otimes t_2)\cdot(v\otimes s))-(x_2\otimes t_2)\cdot((x_1\otimes t_1)\cdot(v\otimes s))
\end{aligned}$$

2. L תמיד מודול מעל L, לפי $x\cdot y=[x,y]$, שהרי מתקיים

$$\begin{aligned}
[x_1,x_2]\cdot y&=[[x_1,x_2],y]=\\
&=-[y,[x_1,x_2]]=\\
&=[x_1,[x_2,y]]+[x_2,[y,x_1]]=\\
&=[x_1,[x_2,y]]-[x_2,[x_1,y]]=\\
&=x_1\cdot(x_2\cdot y)-x_2\cdot(x_1\cdot y)
\end{aligned}$$

תתי המודולים של L מעל L הם בדיוק האידאלים של L. ההצגה המתאימה למודול הזה היא $\pi(x)=\mathrm{ad}x$. L אי פריק מעל L אם ורק אם $\dim_F L=1$ או L אלגברת לי פשוטה.

3. המודול הדואלי למודול נתון: נתון מודול V מעל L. יהי V^* המרחב הדואלי למרחב V, כלומר

$$V^*=\mathrm{Hom}_F(V,F)$$

נגדיר פעולה של L על V^*: בהינתן $x\in L$, $\varphi\in V^*$, נגדיר

$$(x\cdot\varphi)(v)=-\varphi(x\cdot v)$$

הפעולה הזו בבירור בי־לינארית, ולכן נבדוק רק את התנאי על הקומוטטור:

$$\begin{aligned}
([x,y]\cdot\varphi)(v)&=-\varphi([x,y]\cdot v)=-\varphi(x\cdot(y\cdot v)-y\cdot(x\cdot v))=\\
&=-\varphi(x\cdot(y\cdot v))+\varphi(y\cdot(x\cdot v))=(x\cdot\varphi)(y\cdot v)-(y\cdot\varphi)(x\cdot v)=\\
&=(-y\cdot(x\cdot\varphi))(v)+(x\cdot(y\cdot\varphi))(v)=\\
&=(x\cdot(y\cdot\varphi)-y\cdot(x\cdot\varphi))(v)
\end{aligned}$$

בלשון הצגות: ההצגה הדואלית להצגה π של L במרחב V היא ההצגה הבאה $\hat{\pi}$ של L במרחב V^*:

$$\hat{\pi}\left(x\right)\left(\varphi\right)\left(v\right)=-\varphi\left(\pi\left(x\right)\left(v\right)\right)$$

4. מכפלה טנזורית של מודולים מעל L: נתונים שני מודולים V,W מעל אלגברת לי L. נתבונן במרחב הווקטורי (מעל F) $V\otimes_F W$. זהו מודול מעל L לפי

$$x\cdot\left(v\otimes w\right)=\left(x\cdot v\right)\otimes w+v\otimes\left(x\cdot w\right)$$

פעולה זו בבירור בי־לינארית. נבדוק את התכונה עם הקומוטטור:

$$\begin{aligned}\left[x,y\right]\cdot\left(v\otimes w\right)&=\left(\left[x,y\right]\cdot v\right)\otimes w+v\otimes\left(\left[x,y\right]\cdot w\right)=\\&=\left(x\cdot\left(y\cdot v\right)-y\cdot\left(x\cdot v\right)\right)\otimes w+v\otimes\left(x\cdot\left(y\cdot w\right)-y\cdot\left(x\cdot w\right)\right)=\\&=x\cdot\left(y\cdot v\right)\otimes w-y\cdot\left(x\cdot v\right)\otimes w+v\otimes x\cdot\left(y\cdot w\right)-w\otimes y\cdot\left(x\cdot w\right)\end{aligned}$$

באגף השני של השוויון יש לנו

$$\begin{aligned}x\cdot\left(y\cdot\left(v\otimes w\right)\right)-y\cdot\left(x\cdot\left(v\otimes w\right)\right)&=x\cdot\left(y\cdot v\otimes w+v\otimes y\cdot w\right)-y\cdot\left(x\cdot v\otimes w+v\otimes x\cdot w\right)=\\&=\left(x\cdot\left(y\cdot v\right)\right)\otimes w+\cancel{y\cdot v\otimes x\cdot w}+\cancel{x\cdot v\otimes y\cdot w}+v\otimes\left(x\cdot\left(y\cdot w\right)\right)-\\&-\left(y\cdot\left(x\cdot v\right)\right)\otimes w-\cancel{x\cdot v\otimes y\cdot w}-\cancel{y\cdot v\otimes x\cdot w}-v\otimes\left(y\cdot\left(x\cdot w\right)\right)=\end{aligned}$$

ונקבל שהגורמים שלא התבטלו הם אותם גורמים שקיבלנו בפיתוח של האגף הראשון, ולכן יש לנו את השוויון. בלשון הצגות: נניח כי π היא הצגה במרחב V, σ ההצגה במרחב W, אזי ההצגה במרחב $V\otimes W$ תיקרא $\pi\otimes\sigma$ ותפעל לפי

$$\left(\pi\otimes\sigma\right)\left(x\right)=\pi\left(x\right)\otimes1_W+1_V\otimes\sigma\left(x\right)$$

5. יהיו V,W מודולים מעל L. נתבונן במרחב הווקטורי $\mathrm{Hom}_F\left(V,W\right)$. זהו מודול מעל L לפי הפעולה

$$\left(x\cdot T\right)\left(v\right)=x\cdot T\left(v\right)-T\left(x\cdot v\right)$$

פעולה זו היא בבירור בי־לינארית. נבדוק את תכונת הקומוטטור:

$$\begin{aligned}\left(\left[x,y\right]\cdot T\right)\left(v\right)&=\left[x,y\right]\cdot T\left(v\right)-T\left(\left[x,y\right]\cdot v\right)=\\&=x\cdot\left(y\cdot T\left(v\right)\right)-y\cdot\left(x\cdot T\left(v\right)\right)-T\left(x\cdot\left(y\cdot v\right)-y\cdot\left(x\cdot v\right)\right)=\\&=x\cdot\left(y\cdot T\left(v\right)\right)-y\cdot\left(x\cdot T\left(v\right)\right)-T\left(x\cdot\left(y\cdot v\right)\right)+T\left(y\cdot\left(x\cdot v\right)\right)\end{aligned}$$

כמו קודם, נפתח את האגף השני:

$$\begin{aligned}\left(x\cdot\left(y\cdot T\right)\right)\left(v\right)-\left(y\cdot\left(x\cdot T\right)\right)\left(v\right)&=x\cdot\left(\left(y\cdot T\right)\left(v\right)\right)-\left(y\cdot T\right)\left(x\cdot v\right)-y\cdot\left(\left(x\cdot T\right)\left(v\right)\right)+\left(x\cdot T\right)\left(y\cdot v\right)=\\&=x\cdot\left(y\cdot T\left(v\right)-\cancel{T\left(y\cdot v\right)}\right)-\cancel{y\cdot T\left(x\cdot v\right)}+T\left(y\cdot\left(x\cdot v\right)\right)-\\&-y\cdot\left(x\cdot T\left(v\right)-\cancel{T\left(x\cdot v\right)}\right)+\cancel{x\cdot T\left(y\cdot v\right)}-T\left(x\cdot\left(y\cdot v\right)\right)\end{aligned}$$

וארבעת המחוברים הנותרים זהים למה שקיבלנו קודם. בלשון הצגות ־ נניח כי π היא ההצגה במרחב V, σ ההצגה במרחב W, אזי ההצגה במרחב $\mathrm{Hom}_F(V,W)$, שנסמנה כרגע τ, היא

$$\tau(x)(T) = \pi(x)\circ T - T\circ\sigma(x)$$

תרגיל ידוע לנו האיזומורפיזם

$$V^*\otimes_F W \cong \mathrm{Hom}_F(V,W)$$

המוגדר על ידי

$$\varphi\otimes w \mapsto T_{\varphi,w}$$

כאשר

$$T_{\varphi,w}(v) = \varphi(v)\,w$$

הראו שזהו גם איזומורפיזם של מודולים.

בהינתן הצגה π של L במרחב V ממימד סופי, נגדיר את התבנית הבאה על $L\times L$:

$$b_\pi(x,y) = \mathrm{tr}(\pi(x)\circ\pi(y))$$

טענה 1.9 b_π היא תבנית בי־לינארית סימטרית מעל F (ברור) המקיימת

$$b_\pi(x,[y,z]) = b_\pi([x,y],z)$$

לכל $x,y,z\in L$.

את זה קל לבדוק בבית (ניעזר בזה שמתקיים $\mathrm{tr}(AB)=\mathrm{tr}(BA)$. מקרה חשוב מאוד לקורס שלנו ־ כאשר $\pi=\mathrm{ad}$, אז נסמן

$$b_\pi(x,y) = \kappa_L(x,y) = \mathrm{tr}(\mathrm{ad}x\circ\mathrm{ad}y)$$

תבנית זו נקראת **תבנית קילינג** (**Killing**).